Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale

(mit einer Übersicht der Theorie für einfache Integrale).

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Georg August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Georg Prange
aus Hannover.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Göttingen 1915.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Angenommen durch die mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung.

Referent: Herr Geheimrat Prof. Dr. Hilbert.

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Dezember 1914.

Herrn Professor Dr. Conrad H. Müller

zugeeignet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548107_0094

Einleitung.

Soweit die Mechanik Probleme mit endlich vielen Freiheitsgraden behandelt, spielt in den Untersuchungen die Hamilton-Jacobische Theorie eine fundamentale Rolle. Die Auffassung der Differentialgleichungen der Bewegung als Euler-Lagrangesche Gleichungen eines Variationsproblems, welche durch Lagranges Einführung des kinetischen Potentiales (Lagrangesche Funktion) ermöglicht wurde, und die in den mannigfachen Formulierungen des Prinzips der kleinsten Wirkung ihren analytischen Ausdruck findet, weiter die Überführung dieser Gleichungen in ein kanonisches System, sowie schließlich die Einführung des Prinzips der variierenden Wirkung durch Hamilton und damit die Aufstellung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung für die „charakteristische Funktion" haben die Schlüssel geliefert, mit denen der Zugang zu den schwierigen Problemen der Mechanik der Punktsysteme geöffnet ist.

In der Mechanik der Kontinua, wie auch allgemein in der mathematischen Physik ist zwar auch seit langem gezeigt, daß die Differentialgleichungen, welche die einzelnen Vorgänge regulieren, als Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen von Variationsproblemen angesehen werden können, indessen ist das Prinzip der variierenden Wirkung bisher nicht zur Geltung gekommen. In der Tat tritt bei der Einführung dieses Prinzips, sobald man zu Doppel- oder mehrfachen Integralen übergeht, eine wesentliche Schwierigkeit auf. In der Theorie des einfachen Integrals erscheint die Hamiltonsche „charakteristische Funktion" als bestimmt durch die beiden Begrenzungspunkte des Integrationswegs, somit als eine Funktion (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) von endlich vielen Veränderlichen; der analoge Integralwert bei einem mehrfachen Integral ist dagegen abhängig von der Begrenzung des Integrationsgebietes, d. h. von einer Kurve, Fläche oder höheren Mannigfaltigkeit. Die „charakteristische Funktion" Hamiltons

erscheint somit nicht mehr als eine Funktion, sondern als ein „Funktional".

Volterra hat die Untersuchung der Funktionale (Linienfunktionen) in Angriff genommen[1]) und damit das Werkzeug geschaffen, mit dessen Hilfe sich die Hamilton-Jacobische Theorie auf mehrfache Integrale übertragen läßt. Er hat auch selbst diese Übertragung als eins der wichtigsten Ziele der neuen Theorie hingestellt und selbst mit ihr begonnen[2]). Als dann Hadamard die Fortbildung der Theorie der Funktionale aufnahm, hat von ihm beeinflußt Fréchet[3]) die Volterrasche Übertragung der Hamilton-Jacobischen Theorie fortzuführen versucht, andrerseits baut P. Lévy[4]) eine allgemeine Theorie der partiellen funktionalen Differentialgleichungen auf, zu denen auch die partielle funktionale Differentialgleichung für das „charakteristische Funktional", welche an die Stelle von Hamiltons „charakteristischer Funktion" tritt, gehört. Doch erscheint sie von seinem allgemeinen Standpunkt aus nur als eine sehr spezielle Klasse dieser Gleichungen, so daß in seiner Darstellung die Beziehung zur Hamilton-Jacobischen Theorie durchaus zurücktritt.

Für einen systematischen Aufbau der Hamilton-Jacobischen Theorie der mehrfachen Integrale, wie er im folgenden versucht ist, schien es zweckmäßig, davon auszugehen, daß die „Grenzformel" der Variationsrechnung die Quelle dieser Theorie ist, und alle Ergebnisse sonach unmittelbar aus ihr hergeleitet werden können. Da in den üblichen Darstellungen der Theorie für einfache Integrale dieser Gesichtspunkt indessen nicht ganz festgehalten, sondern durch das Hereinziehen mancher andrer Gebiete der Analysis verwischt wird, ist in einem einleitenden Abschnitt eine Darstellung der Hamilton-Jacobischen Theorie der einfachen Integrale vorangestellt. Die folgende Inhaltsangabe dieses Abschnitts wird zugleich die leitenden Gedanken für die Übertragung der Theorie auf mehrfache Integrale hervortreten lassen.

Der Abschnitt I ist in drei Paragraphen gegliedert. Im § 1

---

1) V. Volterra, Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. Roma, Acc. Lincei Rend. (4) 3^2 (1887) passim.

2) V. Volterra, Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni. Roma, Acc. Lincei Rend. (4) 6^1 (1890) pg. 127.

3) M. Fréchet, Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton. Annali di matematica (3) 11 (1905) pg. 187.

4) P. Lévy, Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. Pal. circ. mat. Rend. 37 (1914) pg. 113.

wird das Variationsproblem eingeführt und sogleich Hamiltons „charakteristische Funktion“, für welche der Name „Extremalintegral“ gewählt ist, als Funktion der beiden Grenzen des Integrals betrachtet. Dies Extremalintegral als „Punktpaarfunktion“ genügt den beiden Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen, die sich vom Standpunkt der Punktpaarfunktion aus auch zu einer zusammenfassen lassen. Will man aber das Extremalintegral aus diesen Gleichungen bestimmen, so entsteht die Schwierigkeit, gerade das Extremalintegral aus der Menge der Lösungen auszusondern; Jacobi überwand sie dadurch, daß er an die Stelle des Extremalintegrals den „Extremalintegralwert“ (Feldintegral) in einem Felde von Extremalen setzte. Dieser Extremalintegralwert genügt einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche als „Hamilton-Jacobische Differentialgleichung“ bezeichnet wird. Im Anschluß an den Begriff des Feldes wird der von A. Mayer und Hilbert erforschte Zusammenhang der Hamilton-Jacobischen Gleichung mit den „Unabhängigkeitsfeldern“ auseinandergesetzt und hieraus die Äquivalenz der Kenntnis eines vollständigen Integrals der Hamilton-Jacobischen Gleichung mit der Lösung der Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichungen gefolgert.

Der § 2 behandelt allgemein die Eigenschaften der Euler-Lagrangeschen Gleichungen, bezw. die des äquivalenten kanonischen Systems, in das sie nach Poisson und Hamilton übergeführt werden können. Es wird wieder die Grenzformel der Variationsrechnung herangezogen, sie liefert unmittelbar den Anschluß an die Theorie der Integralinvarianten Poincarés. Diese Integralinvarianten hängen einmal eng mit dem Hilbertschen Unabhängigkeitssatze zusammen, andrerseits liefern sie die Reziprozitätseigenschaft der Jacobischen Gleichungen der zweiten Variation (équations aux variations). Die Grenzformel liefert weiter aber auch das unmittelbare Verständnis für die Auffassung des kanonischen Systems als infinitesimaler Berührungs-Transformation im Sinne Lies und weiter zusammen mit einem Satze über die Lösungen der Jacobischen Gleichungen das Verständnis für den Zusammenhang zwischen den infinitesimalen Transformationen des kanonischen Systems in sich und seinen Integralen, worauf dann die Reziprozitätseigenschaft der Jacobischen Gleichungen zum Poissonschen Theorem führt.

Der kurze § 3 bringt in Umkehrung des Hamiltonschen Gedankenganges die Lösung der Integrationsprobleme bei einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung durch ein Extremal-

integral, welches vermöge der Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bekannt ist, mit andern Worten, er behandelt die Jacobische Methode für die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

In dieser Anordnung und gemäß dem angegebenen Prinzip wird im zweiten Abschnitt die Theorie auf mehrfache Integrale übertragen. Die Darstellung beschränkt sich auf Doppelintegrale und im ersten Kapitel auf eine, im zweiten Kapitel auf zwei unbekannte Funktionen, doch dürften für eine Theorie der n-fachen Integrale mit m unbekannten Funktionen wesentliche neue Schwierigkeiten nicht mehr entstehen. Die Durchführung der Übertragung ist gemäß dem derzeitigen Stande der Funktionalrechnung hier soweit gegeben, als nicht besonders irreguläres Verhalten in Frage kommt, da die Theorie der Funktionale selbst noch nicht die Schärfe der Ausbildung besitzt wie die Theorie der Funktionen einer endlichen Anzahl von Veränderlichen. Die Anwendung der Überlegungen auf bestimmte Probleme der mathematischen Physik wird von selbst dazu führen, derartige Ausnahmefälle zu studieren, und dadurch rückwirkend wieder die Ausbildung der Funktionalrechnung fördern.

Erster Abschnitt.

Das Variationsproblem der einfachen Integrale.

§ 1.

Das Variationsproblem und die partiellen Differentialgleichungen von Hamilton und Jacobi.

1) Das Variationsproblem und die Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

Die Ausführungen mögen anknüpfen an das folgende Problem der Variationsrechnung:

Es sollen zwei Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ der Veränderlichen x in einem gegebenen Intervall $(x_1\, x_2)$ so bestimmt werden, daß das Integral über eine gegebene (analytische) Funktion f, die von diesen Funktionen abhängt:

$$(1) \qquad I = \int_{x_1}^{x_2} f(y', z', y, z, x)\, dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

zu einem Extremum wird, wobei über die „Randwerte" der Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ in den Randpunkten $x = x_1$, $x = x_2$ des Intervalls ev. noch besondere Aussagen zu machen sind, sie etwa hier zunächst festgehalten werden mögen.

Dies Problem ist allgemein genug, um alle Wesenszüge der Theorie bei einer größeren Anzahl abhängiger Veränderlicher, Einführung von Nebenbedingungen u. s. w. bereits deutlich hervortreten zu lassen. Das Problem mit nur einer abhängigen Funktion besitzt diese Allgemeinheit noch nicht; seine Behandlung geht zwar im allgemeinen den folgenden Ausführungen parallel, nur tritt an einer Stelle eine wesentliche Vereinfachung ein, auf die s. Z. (pg. 17 Anm.) besonders aufmerksam gemacht werden wird.

Seien also jetzt beim Problem (1) die Randwerte der unbekannten Funktionen $y(x)$, $z(x)$ fest vorgegeben:

$$(2) \qquad y_1 = y(x_1),\ z_1 = z(x_1);\quad y_2 = y(x_2),\ z_2 = z(x_2);$$

in bekannter Weise ergibt sich dann in der Variationsrechnung als erstes Kriterium für das Eintreten eines Extremums das Bestehen der Euler-Lagrangeschen Gleichungen für die unbekannten Funktionen $y(x)$, $z(x)$:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(f_{y'}) - f_y = 0 & \left[f_{y'} = \dfrac{\partial f}{\partial y'},\ f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}; \right. \\ \dfrac{d}{dx}(f_{z'}) - f_z = 0 & \left. f_{z'} = \dfrac{\partial f}{\partial z'},\ f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} \right]. \end{cases}$$

Nach bekannten Existenzsätzen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es im allgemeinen eine und nur eine Integralkurve dieser Gleichungen (3), welche durch zwei in den Gleichungen (2) vorgegebene Punkte P_1 und P_2 hindurchgeht. Die Integralkurven von (3) nennt die Variationsrechnung „Extremalen", eine Extremale ist demnach durch ein Punktpaar $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ im allgemeinen eindeutig bestimmt.

2) Das „Extremalintegral" (principal function) als „Punktpaarfunktion" und seine Ableitungen.

Wir denken jetzt in einem geeigneten Bereiche des Raumes beliebig zwei Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ vorgegeben und durch eine Extremale verbunden; wir wollen den Wert des Integrals (1) berechnen, wenn es längs der konstruierten Extremalen von P_1 nach P_2 erstreckt wird. Für jede Lage der Punkte P_1 und P_2 hat dieses Integral einen ganz bestimmten Wert, es erscheint somit als Funktion des Punktpaares P_1, P_2:

$$(4)\quad I(P_1, P_2) = I(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2) = \int_{x_1\, y_1\, z_1}^{x_2\, y_2\, z_2} E\, f(y', z', y, z, x)\, dx,$$

wo der Buchstabe E andeuten soll, daß in f für y und z die Werte dieser Funktionen auf der (zugehörigen) Extremalen einzusetzen sind. Die Bedeutung dieser Punktpaarfunktion hat zuerst Hamilton[1]) hervorgehoben, er nannte sie „principal function", wir wollen sie mit dem anschaulichen Namen „Extremalintegral" bezeichnen.

Als Bemerkung über solche Punktpaarfunktionen möge hier folgendes eingeschaltet werden: In Analogie mit Volterra[2]) wollen wir eine Punktpaar-

1) W. R. Hamilton, On a general method in dynamics. London, Phil. Trans. (1834) pg. 247—308. Second essay on a general method in dynamics: ibid. (1835) pg. 95—144.

2) V. Volterra, Vergl. die zusammenfassende Abhandlung: Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Acta math. 12 (1889), pg. 233—286.

funktion $S(P_1, P_2)$ einfach („semplice", „di primo grado") nennen, wenn sie der Bedingung

$$S(P_1, P_3) = S(P_1, P_2) + S(P_2, P_3) \tag{5}$$

genügt. Das eben eingeführte Extremalintegral $I(P_1, P_2)$ ist allgemein keine einfache Punktpaarfunktion, denn da die Integrale von den Extremalen abhängen und diese ganz unabhängig von einander sind, ist der Wert des Extremalintegrals erstreckt längs der Extremalen $P_1 P_3$ ganz verschieden von der Summe der Integrale, die längs der Extremalen $P_1 P_2$ bezw. $P_2 P_3$ erstreckt sind. Man kann aber leicht eine einfache Punktpaarfunktion aus einer gewöhnlichen „Ortsfunktion" $V(x, y, z)$ des Raumes herstellen, indem man ansetzt:

$$S(P_1, P_2) = V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1). \tag{5*}$$

Damit im wesentlichen identisch wäre der Ansatz einer einfachen Punktpaarfunktion vermöge eines Kurvenintegrals

$$S(P_1, P_2) = \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} L(x, y, z)\, dx + M(x, y, z)\, dy + N(x, y, z)\, dz, \tag{5**}$$

das vom Integrationswege unabhängig ist. Es ließe sich auch ohne Mühe nachweisen, daß jede einfache Punktpaarfunktion in dieser Weise durch ein vom Wege unabhängiges Kurvenintegral bezw. mit Hilfe einer Ortsfunktion dargestellt werden kann.

Das Differential unseres Extremalintegrals (4), welches als Funktion von 6 Veränderlichen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ erscheint, ist nach der sog. „Grenzformel" der Variationsrechnung

$$\begin{aligned} \delta I = {} & [f_{y'}\, \delta y + f_{z'}\, \delta z + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})\, \delta x]_2 \\ & - [f_{y'}\, \delta y + f_{z'}\, \delta z + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})\, \delta x]_1, \end{aligned} \tag{6}$$

und somit ergeben sich als seine Ableitungen nach den 6 Veränderlichen

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x_2} &= f - y' f_{y'} - z' f_{z'}\big|_2, \quad \frac{\partial I}{\partial y_2} = f_{y'}\big|_2, \quad \frac{\partial I}{\partial z_2} = f_{z'}\big|_2, \\ \frac{\partial I}{\partial x_1} &= -(f - y' f_{y'} - z' f_{z'})\big|_1, \quad \frac{\partial I}{\partial y_1} = -f_{y'}\big|_1, \quad \frac{\partial I}{\partial z_1} = -f_{z'}\big|_1, \end{aligned} \right. \tag{6*}$$

wo die Indizes bedeuten, daß für die Funktionen $y(x)$ und $z(x)$, welche die betreffende Extremale bestimmen, die Werte an der Stelle $x = x_2$ bezw. $x = x_1$ einzusetzen sind.

Da die Richtungskoeffizienten $y'(x)$ und $z'(x)$ der Extremale in einem der beiden Punkte P_1 und P_2 von der Lage des anderen abhängen, sind die Ableitungen (6*) wieder Punktpaarfunktionen.

Bei einfachen Punktpaarfunktionen sind die Ableitungen (6*) bloße Ortsfunktionen, wie man unmittelbar aus (5*) bezw. (5**) verifiziert.

In die Formeln (6) bezw. (6*) ist dadurch eine Unsymmetrie hineingekommen, daß der eine Punkt des Punktpaares als untere Grenze, der andere als obere Grenze eines bestimmten Integrals

in der Punktpaarfunktion auftritt. Dadurch ist das Inkrement dx bei nach beiden Seiten wachsendem Intervall im Punkte P_2 etwa positiv, im Punkte P_1 dagegen dann negativ. Es wird daher die Symmetrie der Auffassung wiedergewonnen werden, wenn wir in P_1 bei Bildung aller nach x zu nehmenden Ableitungen dx_1 durch $(-dx_1)$ ersetzen. Dann kehren sich in der Tat in der zweiten Formelgruppe (6*) die von der ersten Gruppe (6*) abweichenden Vorzeichen um, wir können sagen, die Ableitungen der Punktpaarfunktion $I(P_1, P_2)$ sind in ihren beiden Punkten:

$$(7) \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = f - y' f_{y'} - z' f_{z'}, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = f_{y'}, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = f_{z'}.$$

3) Die beiden Hamiltonschen Gleichungen.

Hamilton[1]) schloß aus den Formeln (6*), daß die Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen (3) bei vorgegebenen Randwerten (2) geleistet wäre, wenn das Extremalintegral als Funktion seiner beiden Randpunkte irgendwie bekannt wäre. Denn wir können aus den 4 folgenden der Gleichungen (6*)

$$(6^{**}) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial y_2} &= f_{y'}|_2, \quad \frac{\partial I}{\partial z_2} = f_{z'}|_2 \\ \frac{\partial I}{\partial y_1} &= -f_{y'}|_1, \quad \frac{\partial I}{\partial z_1} = -f_{z'}|_1 \end{aligned}$$

$y'(x_1)$, $z'(x_1)$; $y'(x_2)$, $z'(x_2)$ berechnen und somit in bekannter Weise von jedem der beiden Randpunkte aus eine Extremale konstruieren. Wir wissen a priori, daß jede der beiden so konstruierten Extremalen auch durch den anderen Punkt des Punktpaares hindurchgehen muß, und daß somit beide identisch sind.

Nach der bisherigen Auffassung entspränge hieraus zunächst aber noch kein Vorteil für die Integration, da erst die Euler-Lagrangeschen Gleichungen integriert sein müssen, wenn das Extremalintegral gebildet werden soll. Hamilton gewinnt indessen für dieses Integral unmittelbar einen Ansatz als Lösung zweier partieller Differentialgleichungen. Dazu knüpft er an die Gleichungen (6*) an; nachdem er die beiden letzten Gleichungen jeder Zeile nach y' und z' aufgelöst hat, setzt er die erhaltenen Ausdrücke je in die erste Gleichung dieser Formelgruppe ein. Setzt er dann noch zur Abkürzung:

$$(8) \qquad f - y' f_{y'} - z' f_{z'} = H\left(x, y, z \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}\right),$$

1) Hamilton: loc. cit. (pg. 10).

so erhält er für die Punktpaarfunktion $I(P_1, P_2)$ die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x_2} &= H\left(x_2, y_2, z_2; \quad \frac{\partial I}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial I}{\partial z_2}\right) \\ -\frac{\partial I}{\partial x_1} &= H\left(x_1, y_1, z_1; -\frac{\partial I}{\partial y_1}, -\frac{\partial I}{\partial z_1}\right). \end{aligned}$$

Ersetzen wir dx_1 durch $(-dx_1)$, wie wir es oben als naturgemäß nachgewiesen haben, so fallen beide Gleichungen (9) in die eine Gleichung

$$(9^*) \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = H\left(x, y, z; \frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial z}\right)$$

zusammen, die für jeden der beiden Randpunkte P_1 und P_2 der Punktpaarfunktion erfüllt sein muß.

Hamilton hat nicht die Frage aufgeworfen, ob irgend eine Punktpaarfunktion, die eine Lösung der beiden Hamiltonschen Gleichungen (9) ist, in den Überlegungen dieses Abschnitts die Rolle des Extremalintegrals spielen könne und zu einer Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bei vorgeschriebenen Randwerten führen würde. Man kann sich unmittelbar überzeugen, daß dies nicht der Fall ist. Zu dem Zwecke konstruieren wir in folgender Weise eine Punktpaarfunktion, welche den Gleichungen (9) genügt. Wir denken uns den einen Punkt des Extremalintegrals, etwa die untere Grenze, in einem bestimmten Punkte A_1 des betrachteten Bereiches festgehalten und dann jeden anderen Punkt P des Bereiches mit A_1 durch eine Extremale verbunden. Wird den Punkten P als eine Art Raumbelegung der Wert des Extremalintegrals $I(A_1, P)$ zugeordnet, so ist jetzt im Bereiche des Raumes eine Ortsfunktion $V_1(x, y, z)$ definiert (im Gegensatz zur Punktpaarfunktion) und diese Ortsfunktion ist eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(10) \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x} = H\left(x, y, z; \frac{\partial V_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial z}\right),$$

die formal mit (9*) übereinstimmt.

In derselben Weise können wir einen zweiten festen Punkt A_2 des Bereiches mit allen Punkten P je durch eine Extremale verbinden und durch den zugehörigen Extremalintegralwert eine zweite Ortsfunktion $V_2(x, y, z)$ definieren, die ebenfalls der partiellen Differentialgleichung (10) Genüge leistet.

Bilden wir dann mit Hilfe dieser beiden Ortsfunktionen

$V_1(x, y, z)$ und $V_2(x, y, z)$ die folgende Punktpaarfunktion für die beiden beliebigen Punkte P_1 und P_2:

$$(11)\quad T(P_1, P_2) = V_2(P_2) - V_1(P_1) = V_2(x_2, y_2, z_2) - V_1(x_1, y_1, z_1),$$

so genügt sie (die natürlich keine einfache Punktpaarfunktion ist) den beiden Hamiltonschen Differentialgleichungen (9). Nach der Entstehungsart der Punktpaarfunktion $T(P_1, P_2)$ ist aber klar, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial T}{\partial y_2}, \frac{\partial T}{\partial z_2}$ bezw. $\frac{\partial T}{\partial y_1}, \frac{\partial T}{\partial z_1}$ nichts zu tun haben mit den Richtungskoeffizienten derjenigen Extremale, welche die Punkte P_1 und P_2 verbindet, sie kann daher nicht für die gewünschte Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen benützt werden. Wir sehen so, daß die Schwierigkeit gerade darin besteht, aus der Gesamtheit der möglichen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (9) das Extremalintegral selbst auszusondern.

4) Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.

Wohl um diese Schwierigkeit zu umgehen, hat Jacobi[1]), der die Untersuchungen Hamiltons weiterführte, mit der Hamiltonschen Auffassung des Extremalintegrals als Punktpaarfunktion gebrochen. Er geht gerade von der Auffassung aus, die wir bereits eben benützt haben, daß er den einen Endpunkt des Extremalintegrals festhält und damit zu einer Belegung des Raumes durch den Wert des Extremalintegrals $V(x, y, z)$ kommt. Diese Belegung liefert, wie wir sahen, eine Lösung der einen partiellen Differentialgleichung (10), die in der Darstellung von Jacobi die beiden Hamiltonschen Differentialgleichungen ersetzt und die wir daher die „Hamilton-Jacobische Gleichung“ nennen wollen.

Die betrachtete Ortsfunktion, der Extremalintegralwert $V(x, y, z)$, ist eine Lösung dieser Gleichung, die infolge der willkürlichen Lage des Punktes A, von dem aus das Extremalintegral erstreckt wird, von zwei wesentlichen Konstanten abhängt (an sich von drei, wo aber die dritte nur additiv ist), es ist somit ein vollständiges Integral von (10). Der Extremalintegralwert selbst kann ohne weiteres die Stelle des Hamiltonschen Extremalintegrals in der obigen Bestimmung (6**) der Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen vertreten. Nehmen wir nämlich

1) C. G. J. Jacobi: Vergl. insbes. die zusammenfassende Arbeit: „Probleme der Mechanik bei Existenz einer Kräftefunktion und über die Theorie der Störungen“. Werke Bd. V, pg. 217—395.

an, daß der Punkt A die Koordinaten $x = a,\ y = b,\ z = c$ habe, also das vollständige Integral $V = V(x, y, z, a, b, c)$ wäre, so brauchen wir nach den Ausführungen auf pg. 12 nur die Ableitungen dieser Funktion nach b und c zu bilden, um die Anfangsrichtung der von A ausstrahlenden Extremale, welche durch P hindurchgeht, zu finden. Indem wir die Ableitungen neuen willkürlichen Konstanten gleichsetzen

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \beta, \qquad \frac{\partial V}{\partial c} = \gamma, \tag{12}$$

erhalten wir die ganze Schar der von A ausstrahlenden Extremalen. Die Gleichungen (12) liefern demnach die allgemeine (von 4 Konstanten abhängige) Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen. Gleichzeitig ist damit auch die oben gestellte Randwertaufgabe für diese Gleichungen (3) erledigt, insofern die Konstanten β und γ so bestimmt werden können, daß die Extremale (12) außer durch A noch durch einen zweiten beliebig gegebenen Punkt hindurchgeht.

Auch hier stellen wir umgekehrt die Frage, ob ein beliebiges vollständiges Integral von (10) immer durch einen Extremalintegralwert dargestellt werden kann, bezw. wie dies geschehen kann. Jacobi[1]) spricht es aus, daß aus einem beliebigen vollständigen Integral der partiellen Differentialgleichung (10) durch die Gleichungen (12) die allgemeine Lösung der Gleichungen (3) gewonnen werden kann.

Wollen wir diesen Satz, den Jacobi durch Rechnung herleitet, unmittelbar an der Hand des Variationsproblems gewinnen, so sind noch einige weitere Überlegungen nötig. Um zu diesen überzuleiten, heben wir noch einmal den Unterschied zwischen der ursprünglichen Hamiltonschen Auffassung und der von Jacobi vorgenommenen Modifikation deutlich hervor.

Hamilton betrachtet gleichzeitig die ganze vierparametrige Schar der Integralkurven der Euler-Lagrangeschen Gleichungen, deren jede ihm zu einer bestimmten Wahl des Extremalintegrals dienen kann. Jacobi greift aus dieser vierparametrigen Schar zunächst eine zweiparametrige Schar heraus, nämlich alle die, welche von einem festgehaltenen Punkte A ausstrahlen. Die vierparametrige Gesamtheit der Extremalen erhält er dann erst dadurch, daß er nachträglich den Punkt A wieder variieren läßt, wodurch zwei neue Parameter hereinkommen.

---

1) Jacobi: loc. cit. pg. 240—241.

5) *Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung und das Extremalenfeld.*

Wir knüpfen, um später den Jacobischen Satz zu gewinnen, an die Vorstellung einer zweiparametrigen Schar von Extremalen an, die den Raum einfach und lückenlos erfüllen, also im Sinne von Weierstraß ein Feld bilden. Die Jacobische Extremalschar ist ein spezielles solches Feld, sie führte zu einer Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung. Wir wollen allgemein diejenigen Extremalfelder charakterisieren, aus denen sich eine Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung gewinnen läßt.

Denken wir uns ein beliebiges Feld von Extremalen

$$y = Y(x, b, c), \quad z = Z(x, b, c) \tag{13}$$

gegeben, so können wir auch in ihm eine Ortsfunktion $W(x, y, z)$, ähnlich wie bei Jacobi definieren. Wir brauchen nur durch das Feld irgend eine Fläche zu legen, die jede Extremale in einem und nur in einem Punkte schneidet; dann kann jedem Punkte P des Raumes als Funktionswert der Wert des Extremalintegrals zugeordnet werden, den dieses erhält, wenn es längs der durch P gehenden Extremalen des Feldes von dem Schnittpunkt dieser Extremalen mit der Fläche aus bis zu dem Punkte P hin erstreckt wird.

Aber die so definierte Funktion $W(x, y, z)$ genügt der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung im allgemeinen nicht.

Es seien nämlich x_0, y_0, z_0 die Koordinaten eines Punktes der Ausgangsfläche und die Gleichung der Fläche laute:

$$x_0 = \xi(y_0, z_0), \tag{14}$$

dann erscheinen y_0 und z_0 und durch deren Vermittlung auch x_0 als Funktionen der Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes des Feldes, denn jedem Punkt des Feldes ist vermöge der durch ihn hindurchgehenden Extremalen ein Punkt der Ausgangsfläche zugeordnet; es ist also

$$y_0 = y_0(x, y, z), \quad z_0 = z_0(x, y, z), \quad x_0 = \xi(y_0(x, y, z),\ z_0(x, y, z)). \tag{15}$$

Wenden wir auf die Funktion

$$W(x, y, z) = \int_{\xi(y_0, z_0),\, y_0, z_0}^{x, y, z} E\, f(y', z', y, z, x)\, dx \tag{16}$$

die Grenzformel (6) der Variationsrechnung an, so ergibt sich

$$\delta W = (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})\,\delta x + f_{y'}\,\delta y + f_{z'}\,\delta z - \{(f - y' f_{y'} - z' f_{z'})|^{\xi}\,\delta x_0 + f_{y'}|^{\xi}\,\delta y_0 + f_{z'}|^{\xi}\,\delta z_0\}. \tag{17}$$

Darin bedeuten y' und z' die Ableitungen der durch den betrachteten Punkt P hindurchgehenden Feldextremalen. Sie können auch als Funktionen des Ortes im Felde angesehen werden, dann heißen sie die „Gefällfunktionen“ des Feldes; sie mögen als solche mit $p(x, y, z)$ und $q(x, y, z)$ bezeichnet werden. Führen wir diese Bezeichnungen ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (15) für die partiellen Ableitungen der Funktion $W(x, y, z)$ die Werte:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = f - p f_p - q f_q - \left\{\left[(f - p f_p - q f_q)\frac{\partial \xi}{\partial y_0} + f_p\right]^{\xi}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \left[(f - p f_p - q f_q)\frac{\partial \xi}{\partial z_0} + f_q\right]^{\xi}\frac{\partial z_0}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = f_p - \left\{\left[(f - p f_p - q f_q)\frac{\partial \xi}{\partial y_0} + f_p\right]^{\xi}\frac{\partial y_0}{\partial y} + \left[(f - p f_p - q f_q)\frac{\partial \xi}{\partial z_0} + f_q\right]^{\xi}\frac{\partial z_0}{\partial y}\right\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = f_q - \left\{\left[(f - p f_p - q f_q)\frac{\partial \xi}{\partial y_0} + f_p\right]^{\xi}\frac{\partial y_0}{\partial z} + \left[(f - p f_p - q f_q)\frac{\partial \xi}{\partial z_0} + f_q\right]^{\xi}\frac{\partial z_0}{\partial z}\right\}.$$

Aus der Gestalt dieser Ableitungen ist unmittelbar ersichtlich, daß $W(x, y, z)$ nur dann der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung genügen kann, wenn die in geschwungenen Klammern stehenden Ausdrücke verschwinden. Das aber heißt, daß die Ausgangsfläche (14) so bestimmt wird, daß sie ein Integral der totalen linearen Differentialgleichung

$$(f - p f_p - q f_q)\,d\xi + f_p\,dy_0 + f_q\,dz_0 = 0 \tag{18}$$

ist, sie muß also eine Fläche sein, die alle Extremalen des Feldes „transversal“ schneidet.

6) *Das Extremalenfeld als „Unabhängigkeitsfeld“.*

Damit sich eine solche transversale Fläche bestimmen läßt, muß die Differentialgleichung (18) vollständig integrabel sein.

Bei dem Variationsproblem mit nur einer unbekannten Funktion würde an die Stelle von (18) die Differentialgleichung:

$$(f - p f_p)\,d\xi + f_p\,dy_0 = 0 \tag{18a}$$

treten. Da sie eine gewöhnliche totale Differentialgleichung zwischen ξ und y_0 ist, besitzt sie immer eine Lösung. Jedes Feld ist demnach hier von der verlangten Art. Darin besteht die Spezialisierung, von der auf pg. 9 die Rede war.

Die Integrabilitätsbedingung für Gleichung (18) lautet:

$$(f - p f_p - q f_q)\left[\frac{\partial f_p}{\partial z} - \frac{\partial f_q}{\partial y}\right] + f_p\left[\frac{\partial f_q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}(f - p f_p - q f_q)\right] + f_q\left[\frac{\partial}{\partial y}(f - p f_p - q f_q) - \frac{\partial f_p}{\partial x}\right] = 0. \tag{19}$$

Ferner gelten in jedem Felde für die Gefällfunktionen p und q die partiellen Differentialgleichungen [1]):

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(f_p) - \dfrac{\partial}{\partial y}(f - pf_p - qf_q) + q\left[\dfrac{\partial}{\partial z}(f_p) - \dfrac{\partial}{\partial y}(f_q)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(f_q) - \dfrac{\partial}{\partial z}(f - pf_p - qf_q) + p\left[\dfrac{\partial}{\partial y}(f_q) - \dfrac{\partial}{\partial z}(f_p)\right] = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (19) und (20) stellen drei homogene, lineare Gleichungen für die Ausdrücke

$$\frac{\partial f_p}{\partial z} - \frac{\partial f_q}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(f - pf_p - qf_q) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}(f - pf_p - qf_q)$$

vor. Da ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} f - pf_p - qf_q, & -f_q, & f_p \\ q, & 1 & 0 \\ -p, & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f, & -f_q, & f_p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = f$$

nicht identisch verschwindet, so folgt aus ihnen, daß die Gefällfunktionen p und q der Felder, die wir hier betrachten, den Bedingungen

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_p}{\partial z} - \dfrac{\partial f_q}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x} - \dfrac{\partial (f - pf_p - qf_q)}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x} - \dfrac{\partial (f - pf_p - qf_q)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

genügen müssen. Dies sind aber gerade die Bedingungen dafür, daß im Felde das „Hilbertsche Integral“

$$(22)\quad \begin{aligned} I^* &= \int (f - pf_p - qf_q)\,dx + f_p\,dy + f_q\,dz \\ &= \int [f + (y' - p)f_p + (z' - q)f_q]\,dx \end{aligned}$$

vom Integrationswege unabhängig ist. Für unser Feld gilt demnach der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz, wir nennen es daher ein „Unabhängigkeitsfeld“. Dann können wir das Resultat folgendermaßen formulieren: Wollen wir aus einem Felde in dem Extremalintegralwert eine Lösung der Hamilton-Jacobischen Gleichung gewinnen, so muß das Feld ein Unabhängigkeitsfeld

1) Vgl. A. Mayer: Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz. Math. Annal. 62. (1906) pg. 339 oder O. Bolza: Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz. Pal. circ. mat. Rend. 31 (1911) pg. 258—261.

sein, und der Extremalintegralwert muß von einer Transversalen des Unabhängigkeitsfeldes aus gerechnet werden.

Damit haben wir dann aber auch, wie im dritten Paragraphen noch näher ausgeführt wird, den Anschluß an den erwähnten Jacobischen Satz gefunden; denn setzen wir in ein beliebiges vollständiges Integral der Hamilton-Jacobischen Gleichung für die Konstanten feste Werte ein, so können wir ein Unabhängigkeitsfeld angeben, d. h. ein Feld, welches Transversalflächen besitzt, in dem der von einer Transversalfläche aus gerechnete Extremalintegralwert mit dem gegebenen Integral zusammenfällt [1]).

7) Das Unabhängigkeitsfeld und die Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

Das Unabhängigkeitsfeld vereinigt in sich nur zweifach unendlich viele Extremalen; mit Hilfe des Extremalintegralwerts, den ein solches definiert, kann daher die Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichungen nicht gelöst werden, da dazu ja vier verfügbare Parameter erforderlich sind.

Dasselbe gilt natürlich von dem zum Felde gehörigen Hilbertschen Unabhängigkeitsintegral, welches zwar eine Punktpaarfunktion, aber eine einfache darstellt.

Wir können uns indessen die nötige Anzahl der Parameter dadurch verschaffen, daß wir nicht ein Unabhängigkeitsfeld für sich betrachten, sondern eine von zwei Parametern abhängige Schar von Feldern [2]).

Um eine solche herzustellen, geben wir eine zweiparametrige Schar von Flächen und konstruieren zu jeder ein Unabhängigkeitsfeld, indem wir alle zu ihr transversalen Extremalen ziehen. Der zu dem einzelnen Unabhängigkeitsfelde gehörige Extremalintegralwert erscheint dann als Funktion der beiden Parameter der Flächenschar $I = I(x, y, z, a, b)$; er ist also, da er zwei wesentliche Parameter enthält, ein vollständiges Integral der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (10). Im dritten Paragraphen werden wir ebenfalls zeigen, daß jedes vollständige Integral dieser Gleichung in der angegebenen Weise dargestellt werden kann.

Wird die zweiparametrige Flächenschar durch die Gleichungen

$$x_0 = x_0(x, y, z, a, b), \qquad y_0 = y_0(x, y, z, a, b), \qquad z_0 = z_0(x, y, z, a, b)$$

---

1) Vgl. auch J. Hadamard, Calcul des variations. Paris (1910) t. 1, pg. 161—162.

2) D. Hilbert, Zur Variationsrechnung. Math. Annalen 62 (1906) pg. 361.

dargestellt, so liefert die Grenzformel der Variationsrechnung als Ableitungen des Extremalintegralwerts $I(x, y, z, a, b)$ nach den Parametern (bei festgehaltenem x, y, z)

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a} = -(f_{y'})_0 \dfrac{\partial y_0}{\partial a} - (f_{z'})_0 \dfrac{\partial z_0}{\partial a} - (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial a} \\ \dfrac{\partial I}{\partial b} = -(f_{y'})_0 \dfrac{\partial y_0}{\partial b} - (f_{z'})_0 \dfrac{\partial z_0}{\partial b} - (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})_0 \dfrac{\partial x_0}{\partial b}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke ändern sich nicht, so lange der Punkt x, y, z auf derselben Feldextremalen bleibt, daher stellen die Gleichungen

$$(24)\qquad \frac{\partial I}{\partial a} = c, \qquad \frac{\partial I}{\partial b} = d,$$

unter c und d Konstante verstanden, die einzelnen Extremale des Variationsproblems dar.

Um jetzt die Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichungen für zwei beliebig vorgegebene Punkte P_1 und P_2 zu lösen, bestimmen wir bei zunächst fester Wahl der Parameter a und b die zu P_1 und P_2 gehörigen Extremalintegralwerte $I_1 = I(P_1, a, b)$ und $I_2 = I(P_2, a, b)$, dann wird für die durch P_1 bezw. P_2 hindurchgehende Extremale des Feldes

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial I_1}{\partial a} = c_1, & \dfrac{\partial I_1}{\partial b} = d_1 \\ \dfrac{\partial I_2}{\partial a} = c_2, & \dfrac{\partial I_2}{\partial b_1} = d_2. \end{cases}$$

Soll das Feld so gewählt sein, daß P_1 und P_2 auf derselben Extremalen liegen, so muß $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$ sein, d. h. die Parameter a und b sind aus den Gleichungen

$$(26)\qquad \frac{\partial (I_1 - I_2)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial (I_1 - I_2)}{\partial b} = 0$$

zu berechnen. Dann sind durch die Relationen $\dfrac{\partial I}{\partial y} = f_{y'}$, $\dfrac{\partial I}{\partial z} = f_{z'}$, die Richtungen der verlangten Extremale im Punkte P_1 oder auch P_2 bestimmt.

§ 2.

Integrationstheorie der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bezw. des zugehörigen kanonischen Systems.

Die Integration der beiden Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dx}(f_{y'}) - f_y = 0 \\ \frac{d}{dx}(f_{z'}) - f_z = 0 \end{cases}$$

ist im ersten Paragraphen geleistet mit Hilfe der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung, wobei es sich insbesondere um die Lösung der Randwertaufgabe für jene Gleichungen handelte. Die Tatsache, daß sie aus dem Variationsproblem

$$(2) \qquad I = \int_{x_1}^{x_2} f(y', z', y, z, x)\,dx = \text{Extrem.}$$

entspringen, bringt aber auch für die allgemeine Integrationstheorie dieser Differentialgleichungen gewisse Vorteile. Wir wollen diese hier übersichtlich zusammenstellen.

1) Das kanonische System.

Im vorigen Paragraphen sind wir zunächst davon ausgegangen, für die Gleichungen (1) eine Randwertaufgabe zu lösen, nämlich eine Integralkurve so zu bestimmen, daß sie durch zwei vorgegebene Punkte des betrachteten Bereiches hindurchging. Im Sinne der allgemeinen Integrationstheorie der Differentialgleichungen erscheint es einfacher, nur in einem Punkte des Bereiches die Werte von y und z und dazu die ihrer Ableitungen y' und z' vorzugeben. Diese Festlegung kommt ganz natürlich herein, wenn man — wie man es in der Integrationstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen gern tut — die beiden Gleichungen (1) je in ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegt. Formal erreicht man diese Umformung einfach dadurch, daß man

$$y' = p, \qquad z' = q$$

als neue Veränderliche einführt, wodurch das System (1) in ein System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung übergeht.

Indessen wendet man bei einer solchen Umformung zweckmäßiger Legendresche Transformation an und führt an Stelle von p und q die Größen

$$\pi = f_p, \qquad \varkappa = f_q \tag{3}$$

als neue Veränderliche ein. Berechnen wir aus diesen beiden Gleichungen p und q als Funktionen von π und $\varkappa$ und führen unter Einsetzen der berechneten Werte wieder wie im vorigen Paragraphen (vergl. Gleichung 8) die neue Funktion

$$H(\pi, \varkappa, y, z, x) = f - p \cdot f_p - q \cdot f_q \tag{4}$$

ein, so werden unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} \\ -p &= \frac{\partial H}{\partial \pi}, \qquad -q = \frac{\partial H}{\partial \varkappa}, \end{aligned} \tag{4*}$$

welche unmittelbar aus (4) folgen, die Euler-Lagrangeschen Gleichungen (1) in das „kanonische System“

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, & \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi} \\ \dfrac{d\varkappa}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial z}, & \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial \varkappa} \end{cases} \tag{5}$$

übergehen, welches seinerseits als Euler-Lagrangesches Gleichungssystem zu dem Variationsprobleme

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \pi \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{dz}{dx} + H(\pi, \varkappa, y, z, x) \right\} dx = \text{Extrem} \tag{6}$$

gehört. Bei der Variation dieses Integrals können die Werte von y, z; $\pi, \varkappa$ nur in dem einen Endpunkte, etwa für $x = x_1$, vorgeschrieben werden.

Jeder Wertegruppe der kanonischen Veränderlichen $\pi, \varkappa$; y, z, x können wir geometrisch in einem fünfdimensionalen Raume einen Punkt zuordnen. Von jedem Punkt dieses Raumes läuft dann eine und nur eine Integralkurve des kanonischen Systems aus, die durch Angabe dieses Punktes vollkommen bestimmt ist, so daß wir in dem fünfdimensionalen Raume die Gesamtheit der Lösungen des Systems (5) bezw. damit auch der Gleichungen (1) in einer einfachen Überdeckung des Raumes unmittelbar vor Augen haben.

Dagegen haben wir in den Euler-Lagrangeschen Gleichungen (1) nur drei Veränderliche y, z, x, die wir in einem dreidimensionalen Raume interpretieren müssen. Eine Integralkurve der Gleichungen (1) ist erst dann bestimmt, wenn wir außer einem Punkte x, y, z noch ihre Richtung y', z' in diesem Punkte vorgeschrieben haben. Durch jeden Punkt des Raumes laufen daher noch zweifach unendlich viele Extremalen. Wollen wir hier eine einfache Bedeckung des Raumes haben, so müssen wir aus der vierparametrigen Gesamtheit der Extremalen eine solche zweiparametrige Schar herausgreifen, die ein Feld bildet. Wenn wir im folgenden von den Integralkurven der Gleichungen (1) sprechen, wollen wir uns immer ein solches Feld gegeben denken.

2) Die relative Integralinvariante und das Unabhängigkeitsintegral.

Um jetzt das Prinzip zu gewinnen, aus dem sich die Integrationsvorteile für die Gleichungen (1), die aus der Beziehung zu einem Variationsproblem entspringen, herleiten lassen, knüpfen wir an die Grenzformel der Variationsrechnung an und betrachten den Differentialausdruck

$$f_{y'}\,\delta y + f_{z'}\,\delta z + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})\,\delta x, \tag{7}$$

worin die Differentiale δx, δy, δz beliebige Inkremente, dagegen y' und z' die wohlbestimmten Richtungskoeffizienten der durch den betreffenden Punkt hindurchgehenden Extremale des Feldes sind. In den kanonischen Veränderlichen würde dieser Ausdruck die Gestalt erhalten:

$$\pi\,\delta y + \varkappa\,\delta z + H\,\delta x. \tag{7*}$$

Wir bilden das Linienintegral über den Ausdruck (7) sowie (7*) längs einer beliebigen geschlossenen Kurve in dem zugehörigen dreidimensionalen bezw. fünfdimensionalen Raume. Von jedem Punkte einer solchen geschlossenen Kurve wird eine Extremale ausstrahlen, und wir denken die Kurve speziell so gewählt, daß nicht zwei Kurvenpunkte auf ein und derselben Extremalen liegen. Die Gesamtheit der Extremalen, die auf der Kurve aufgereiht sind, wird dann eine Art röhrenförmiger Fläche erzeugen. Um diese Extremalröhre legen wir eine zweite Kurve derselben Art, dann ist jedem Punkt der ersten Kurve ein ganz bestimmter Punkt der zweiten Kurve zugeordnet, nämlich derjenige, welcher mit ihm auf derselben Extremale liegt. Die Punkte der ersten Kurve x_1, y_1, z_1 — wenn wir an den Ausdruck (7) anknüpfen — können wir als Funktionen eines Parameters α festlegen, dann sind auch

die ihnen zugeordneten Punkte x_2, y_2, z_2 der zweiten Kurve als Funktionen von α gegeben. Nehmen wir jetzt das Extremalintegral, das wir im vorigen Paragraphen (Gleichung 4) eingeführt haben, je längs des die beiden zugeordneten Punkte verbindenden Stückes der Feldextremalen, so erscheint es ebenfalls als Funktion des Parameters α:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &I(x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2) \\ &\quad = I(x_1(\alpha), y_1(\alpha), z_1(\alpha);\ x_2(\alpha), y_2(\alpha), z_2(\alpha)) = I(\alpha). \end{aligned}$$

Nach der Grenzformel der Variationsrechnung haben wir dann:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta \alpha} &= \left\{(f_{y'})_2 \frac{\delta y_2}{\delta \alpha} + (f_{z'})_2 \frac{\delta z_2}{\delta \alpha} + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})_2 \frac{\delta x_2}{\delta \alpha}\right\} \\ &\quad - \left\{(f_{y'})_1 \frac{\delta y_1}{\delta \alpha} + (f_{z'})_1 \frac{\delta z_1}{\delta \alpha} + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})_1 \frac{\delta x_1}{\delta \alpha}\right\}. \end{aligned}$$

Bilden wir das Integral dieses Ausdrucks längs der gegebenen geschlossenen Kurve, so wird auf der linken Seite $\int_{\bigcirc} \frac{\delta I}{\delta \alpha} = 0$ und wir erhalten demnach

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\left[\int_{\bigcirc} f_{y'}\,\delta y + f_{z'}\,\delta z + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})\,\delta x\right]_2 \\ &\qquad = \left[\int_{\bigcirc} f_{y'}\,\delta y + f_{z'}\,\delta z + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})\,\delta x\right]_1. \end{aligned}$$

Diese Tatsache, daß unser Integral des Differentialausdrucks (7) über eine geschlossene Kurve genommen, denselben Wert behält, wenn wir es über eine beliebige zweite Kurve nehmen, die um die Extremalröhre herumgelegt ist, welche von der ersten Kurve ausstrahlt, drückt Poincaré[1]) dadurch aus, daß er das Integral eine „Integralinvariante“ der Euler-Lagrangeschen Gleichungen nennt, und zwar ist es speziell eine „relative Integralinvariante“ nach seiner Terminologie, relativ deshalb, weil der Integrationsbereich eine geschlossene Kurve sein muß.

In derselben Weise würde sich ergeben, daß für das kanonische System (5) das Integral des Ausdrucks (7*)

$$(10^*)\qquad \int_{\bigcirc} \pi\,\delta y + \varkappa\,\delta z + H\,\delta x$$

eine relative Integralinvariante ist.

1) H. Poincaré: Les methodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris (1892—99) t. 3 chap. 22.

Die Kenntnis dieser relativen Integralinvariante ist die Grundlage für die Integrationstheorie der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bezw. des kanonischen Systems, wie Poincaré im Einzelnen näher ausführt. Wir untersuchen hier noch, wie diese relative Integralinvariante mit dem Hilbertschen Unabhängigkeitssatz zusammenhängt.

Betrachten wir solche Kurven, die sich auf einer Extremalröhre, wie wir sie vorhin charakterisiert haben, auf einen Punkt zusammenziehen lassen, und nehmen wir der Einfachheit halber an, daß sie von jeder Extremale in zwei Punkten geschnitten werde, so können wir auch hier die Kurvenpunkte, welche auf derselben Extremalen liegen, einander zuordnen. Dann erhalten wir die Punkte der beiden so entstehenden Teilstücke der Kurve als Funktionen eines Parameters α. Dabei wird α, um die Kurve zu beschreiben, von einem Werte α' bis zu einem Werte α'' laufen, die den Punkten entsprechen, in denen die Kurve von den Feldextremalen tangiert wird. Es ist also sowohl $J(\alpha') = 0$, als auch $J(\alpha'') = 0$ und aus (9) folgt demnach

$$0 = \int_{\alpha'}^{\alpha''} (f_{y'})_2 \delta y_2 + (f_{z'})_2 \delta z_2 + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})_2 \delta x_2$$

$$- \int_{\alpha'}^{\alpha''} (f_{y'})_1 \delta y_1 + (f_{z'})_1 \delta z_1 + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})_1 \delta x_1$$

oder

$$\int_0 f_{y'} \delta y + f_{z'} \delta z + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) \delta x = 0, \tag{11}$$

wo das Integral (11) wieder über eine geschlossene Kurve erstreckt ist[1]). Entsprechendes würde natürlich im kanonischen System gelten.

Dieser letztere Fall liegt immer vor, wenn das Variationsproblem (2) nur eine unbekannte Funktion enthält. Denn dann haben wir ein Feld in der Ebene und hier ist jede geschlossene Kurve von der Art, daß sie sich auf einen Punkt zusammen ziehen läßt. Das besagt nichts anderes, als daß in der Ebene in jedem Felde das Hilbertsche Integral

$$\int \left\{ f(y', y, x) + \left(\frac{\delta y}{\delta x} - y' \right) f_{y'} \right\} \delta x \tag{12*}$$

1) Der Satz bei H. Hahn: Über den Zusammenhang zwischen den Theorien der zweiten Variation und der Weierstraß'schen Theorie der Variationsrechnung. Pal. circ. mat. Rend. 29 (1910). pg. 49—78.

vom Integrationswege unabhängig ist. Ein Feld im Raum ist dagegen nur dann ein Unabhängigkeitsfeld, wenn die Integrale in der Formel (10) für jede Extremalröhre, auf der sich die Integrationskurven nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, den Wert Null haben; dann ist in der Tat auch hier das Hilbertsche Integral

$$(12) \qquad \int \left\{ f(y', z', y, z, x) + \left(\frac{\delta y}{\delta x} - y'\right) f_{y'} + \left(\frac{\delta z}{\delta x} - z'\right) f_{z'} \right\} \delta x$$

vom Wege unabhängig. Das Unabhängigkeitsintegral kann also als eine spezielle Integralinvariante aufgefaßt werden [1]).

3) Die zugehörigen „absoluten Integralinvarianten" und die „Jacobischen Gleichungen".

Aus den bisher betrachteten relativen Integralinvarianten (erster Ordnung) lassen sich vermöge des Stokesschen Theorems unmittelbar absolute Integralinvarianten (der zweiten Ordnung) bilden. Nach dem vorigen Abschnitt können wir eine gegebene geschlossene Kurve, die zur Bildung der relativen Integralinvariante dient, auf der zugehörigen Extremalröhre beliebig verzerren, ohne daß der Wert der Invariante sich ändert. Wir können daher, ohne die Allgemeinheit der Überlegungen zu gefährden, von vornherein voraussetzen, daß die Kurve in einer Ebene $x = \text{Const.}$ liegt. Dann erhalten die relativen Integralinvarianten die Gestalt

$$(13) \qquad \int_{\bigcirc} f_{y'} \delta y + f_{z'} \delta z = \text{Const.}$$

bezw.

$$(13^*) \qquad \int_{\bigcirc} \pi \delta y + \varkappa \delta z = \text{Const.}$$

Legen wir durch die geschlossene Kurve, über welche diese Integrale erstreckt sind, eine beliebige Fläche, als die wir dann der Einfachheit halber natürlich die durch die Kurve hindurchgehende Ebene $x = \text{Const.}$ wählen werden, so gehen nach dem Stokesschen Satze diese Kurvenintegrale über in die Doppelintegrale

---

1) Für die Gewinnung von Integrationsvorteilen aus der Kenntnis des Unabhängigkeitsintegrals wird diese Tatsache wesentlich sein. In der Tat sind alle Ergebnisse von D. C. Gillespie (Dissert. Göttingen 1906), der dies näher verfolgt hat, unmittelbar in Sätzen Poincarés über Integralinvarianten enthalten.

$$\int\int\left\{\frac{\partial}{\partial z}(f_{y'})-\frac{\partial}{\partial y}(f_{z'})\right\}\delta y\,\delta z = \text{Const.} \tag{14}$$

bezw.

$$\int\int \delta x\,\delta y+\delta x\,\delta z = \text{Const.} \tag{14*}$$

wo die Integrale über die von den Kurven umschlossenen Flächenstücke der Ebene $x = \text{Const.}$ erstreckt sind [1]).

Knüpfen wir zunächst an (14) an, so können wir diese Formel durch Ausführung der Differentiation auf die Gestalt bringen

$$\int\int\left\{f_{y'y'}\frac{\partial y'}{\partial z}+f_{y'z'}\frac{\partial z'}{\partial z}+f_{y'z}-f_{y'z'}\frac{\partial y'}{\partial y}-f_{z'z'}\frac{\partial z'}{\partial y}-f_{z'y}\right\}\delta y\,\delta z = \text{Const.}$$

oder

$$\int\int f_{y'y'}\,\delta y\,\delta y'+f_{y'z'}\,\delta y\,\delta z'+f_{y'z'}\,\delta z\,\delta y'+f_{z'z'}\,\delta z\,\delta z'+(f_{y'z}-f_{z'y})\,\delta y\,\delta z = \text{Const.} \tag{15}$$

In dem der Betrachtung zu Grunde liegenden Extremalfelde seien die einzelnen Extremalen durch die beiden Parameter a und b charakterisiert. In jeder Ebene $x = \text{Const.}$ können dann auch die einzelnen Punkte durch diese Parameter festgelegt werden. Führen wir die Parameter in das Integral (15) ein, so bekommen wir

$$\int\int\left\{f_{y'y'}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial a}\right)+\cdots+(f_{y'z}-f_{z'y})\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right)\right\}da\,db = \text{Const.}$$

längs jeder Extremalen ist darnach auch der Integrand:

$$f_{y'y'}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial a}\right)+\cdots+(f_{y'z}-f_{z'y})\left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\right) = \text{Const.} \tag{16}$$

(weil der Integrationsbereich ganz beliebig). Für das kanonische System ergibt sich entsprechend, daß längs den Extremalen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right) = \text{Const.} \tag{16*}$$

ist.

---

1) Soll das betrachtete Feld ein Unabhängigkeitsfeld sein, so muß, wie aus (14) folgt, der Ausdruck $\frac{\partial}{\partial z}\left(f_{y'}\right)-\frac{\partial}{\partial y}(f_{z'})$ identisch verschwinden. Es müssen also die Größen $f_{y'}$ und f_z die partiellen Ableitungen einer Funktion $\Omega(y, z, x)$ sein. Dies ist die von A. Mayer loc. cit. (pg. 18) angegebene Bedingung für die Gültigkeit des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes.

Diesen Ergebnissen läßt sich noch eine andere Fassung geben: Den Euler-Lagrangeschen Gleichungen (1) sind gewisse lineare Differentialgleichungen zugeordnet, die wir die „Jacobischen Gleichungen“ nennen wollen. (In der Terminologie Poincarés heißen sie „équations aux variations“.) Sie gehören zu der zweiten Variation des Integrals (2), deren Euler-Lagrangesche Gleichungen sie sind. Ist

$$\text{(17)} \qquad I = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(\mathfrak{y}', \mathfrak{z}', \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, x)\, dx$$

diese zweite Variation, wobei

$$\text{(18)} \quad \left\{ \begin{aligned} 2\Phi(\mathfrak{y}', \mathfrak{z}', \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, x) &= f_{y'y'}\mathfrak{y}'^2 + 2f_{y'z}\mathfrak{y}'\mathfrak{z}' + f_{z'z}\mathfrak{z}'^2 \\ &\quad + 2f_{y'y}\mathfrak{y}'\mathfrak{y} + 2f_{y'z}\mathfrak{y}'\mathfrak{z} + 2f_{z'y}\mathfrak{z}'\mathfrak{y} + 2f_{z'z}\mathfrak{z}'\mathfrak{z} \\ &\quad + f_{yy}\mathfrak{y}^2 + 2f_{yz}\mathfrak{y}\mathfrak{z} + f_{zz}\mathfrak{z}^2 \end{aligned} \right.$$

ist, so lauten die Jacobischen Gleichungen

$$\text{(19)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\Phi_{\mathfrak{y}'}) - \Phi_{\mathfrak{y}} &= 0 \\ \frac{d}{dx}(\Phi_{\mathfrak{z}'}) - \Phi_{\mathfrak{z}} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Wie Jacobi gezeigt hat, läßt sich aus jeder Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen (1), $y = y(x, a)$, $z = z(x, a)$, die einen Parameter enthält, unmittelbar eine Lösung der Gleichung (19) gewinnen, indem wir sie nach diesem Parameter differenzieren: $\mathfrak{y} = \frac{\partial y}{\partial a}$, $\mathfrak{z} = \frac{\partial z}{\partial a}$. Aus der zweiparametrigen Schar der Feldextremalen können wir darnach sofort zwei Lösungssysteme der Jacobischen Gleichungen herleiten

$$\text{(20)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{y}_1 &= \frac{\partial y}{\partial a}, \qquad \mathfrak{z}_1 = \frac{\partial z}{\partial a} \\ \mathfrak{y}_2 &= \frac{\partial y}{\partial b}, \qquad \mathfrak{z}_2 = \frac{\partial z}{\partial b}. \end{aligned} \right.$$

Diese Lösungen sind durch die Relation (16) verknüpft, welche aussagt, daß das Jacobische System (19) sich selbst adjungiert ist. Ebenso würde aus (16) folgen, daß das zu dem kanonischen System (5) gehörige Jacobische System

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{p}}{dx} &= \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\mathfrak{y} + \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial \pi}\mathfrak{p} + \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial z}\mathfrak{z} + \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial \varkappa}\mathfrak{k}\\
\frac{d\mathfrak{y}}{dx} &= -\frac{\partial^2 H}{\partial \pi\,\partial y}\mathfrak{y} - \frac{\partial^2 H}{\partial \pi^2}\mathfrak{p} - \frac{\partial^2 H}{\partial \pi\,\partial z}\mathfrak{z} - \frac{\partial^2 H}{\partial \pi\,\partial \varkappa}\mathfrak{k}\\
\frac{d\mathfrak{k}}{dx} &= \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial y}\mathfrak{y} + \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial \pi}\mathfrak{p} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\mathfrak{z} + \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial \varkappa}\mathfrak{k}\\
\frac{d\mathfrak{z}}{dx} &= -\frac{\partial^2 H}{\partial \varkappa\,\partial y}\mathfrak{y} - \frac{\partial^2 H}{\partial \varkappa\,\partial \pi}\mathfrak{p} - \frac{\partial^2 H}{\partial \varkappa\,\partial z}\mathfrak{z} - \frac{\partial^2 H}{\partial \varkappa^2}\mathfrak{k}.
\end{aligned}\right.$$

sich selbst adjungiert ist. Diese Reziprozitätseigenschaft führt, wie in Nro. 5 dargelegt wird, zum Poissonschen Theorem.

4) Das kanonische System als Berührungstransformation.

Von einem zunächst anderen Gesichtspunkte, nämlich von seiner Theorie der Transformationsgruppen aus, hat Lie [1]) die Integrationstheorie der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bezw. des kanonischen Systems in Angriff genommen. Die Grenzformel der Variationsrechnung wird uns auch diese Überlegungen unmittelbar liefern und insbesondere ihren Zusammenhang mit den vorigen Ergebnissen vermitteln.

Halten wir in dem Extremalintegral I (§ 1, Gl. 4) in beiden Punkten des Punktepaares die Abszissen x_2 bezw. x_1 konstant, so erscheint I noch als eine Funktion von 4 Veränderlichen $I(y_2, z_2; y_1, z_1)$, oder wie wir jetzt schreiben wollen:

$$(22)\qquad I(Y, Z; y, z).$$

Die Grenzformel der Variationsrechnung liefert, wenn wir (3) berücksichtigen und noch $f_{y'} = \Pi$, $f_{z'} = K$ setzen:

$$(23)\qquad \delta I = \Pi\delta Y + K\delta Z - \pi\delta y - \varkappa\delta z.$$

Nach der Lieschen Theorie sagt diese fundamentale Relation aus, daß die Extremalen unseres Variationsproblems als Bahnkurven einer Berührungstransformation aufgefaßt werden können. Die Funktion (22) charakterisiert diese Berührungstransformation, sie ist von uns zunächst als Funktion zweier Punkte der Bahnkurve aufgefaßt. Geben wir zur Festlegung der Extremale an Stelle zweier Punkte nur einen Punkt und die zugehörige Tangente vor, so erscheint die charakteristische Funktion I als Funktion

1) S. Lie: Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen. Kristiania, Arch. for Math. og Naturw. 2 (1877), pg. 129.

von y, z, π und $\varkappa$ ausgedrückt:

$$I(Y, Z, y, z) = I(\pi, \varkappa, y, z). \tag{22*}$$

Nach diesen Überlegungen müssen die Definitionsgleichungen der zugehörigen infinitesimalen Berührungstransformation identisch mit dem kanonischen System (5) sein. Um dies unmittelbar zu verifizieren, lassen wir die beiden Punkte (Y, Z) und (y, z) auf der Extremale unendlich dicht zusammenrücken; dann ist nach (23)

$$\delta I = d(\pi \delta y + \varkappa \delta z) \tag{24}$$

und δI wird in diesem Falle

$$\delta\left[\left(\pi \frac{dy}{dx} + \varkappa \frac{dz}{dx} + H(\pi, \varkappa, y, z, x)\right) dx\right].$$

Also erhalten wir

$$\delta\left(\pi \frac{dy}{dx} + \varkappa \frac{dz}{dx} + H(\pi, \varkappa, y, z, x)\right) = \frac{d}{dx}(\pi \delta y + \varkappa \delta z)$$

oder

$$\frac{d\pi}{dx}\delta y + \frac{d\varkappa}{dx}\delta z - \frac{dy}{dx}\delta\pi - \frac{dz}{dx}\delta\varkappa = \delta H(\pi, \varkappa, y, z, x), \tag{25}$$

woraus sofort das kanonische System (5) hervorgeht.

Die beiden Funktionen, welche in der Theorie der Berührungstransformationen immer neben einander auftreten, und von denen die eine die endlichen Transformationen, die andere die infinitesimalen Transformationen charakterisiert, sind hier I und H. Die erstere kann daher aus letzterer gebildet werden, wenn man das Integral in der Form (6) ansetzt und es als Extremalintegral bestimmt.

5) Die Transformationen des kanonischen Systems in sich. Das Poissonsche Theorem.

Jedem Punkt des fünfdimensionalen $(x, y, z, \pi, \varkappa)$ Raumes ist mittels der durch ihn hindurchgehenden Extremale des Systems (5) in einer beliebigen Hyperebene $x = x_0$ ein bestimmter Punkt $y_0, z_0, \pi_0, \varkappa_0$ zugeordnet. Es liegt im Sinne der Lieschen Theorie, nach einparametrigen Gruppen zu fragen, welche das kanonische System (5) invariant lassen, d. h. die zugehörigen Extremalen unter einander vertauschen. (Dazu genügt es offenbar, daß sie nur die Treffpunkte der Extremalen mit der Hyperebene $x = x_0$ unter einander vertauschen. Denn eine Transformationsgruppe, welche diese Anfangswerte unter einander vertauscht, wird gleichzeitig die Ex-

tremalen, die ja durch die Anfangswerte bestimmt sind, in bestimmter Weise unter einander vertauschen.) Es seien

$$(26)\qquad \begin{cases} \delta y = \mathfrak{a}(x, y, z, \pi, \varkappa)\,\delta\alpha & \delta z = \mathfrak{b}(x, y, z, \pi, \varkappa)\,\delta\alpha \\ \delta\pi = \mathfrak{m}(x, y, z, \pi, \varkappa)\,\delta\alpha & \delta\varkappa = \mathfrak{n}(x, y, z, \pi, \varkappa)\,\delta\alpha \end{cases}$$

die infinitesimalen Transformationen der Gruppe, welche ein Punkt des Raumes erleidet, dann muß nach pg. 28 $\mathfrak{y} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}$ ein Lösungssystem der Jacobischen Gleichungen (21) sein. Ferner muß die relative Integralinvariante

$$\int_{\bigcirc} \pi\, dy + \varkappa\, dz$$

auch nach der Transformation eine relative Integralinvariante bleiben, d. h. es muß vermöge (26)

$$(27)\qquad \delta(\pi\, dy + \varkappa\, dz) = dg\,\delta\alpha$$

sein, wo g eine beliebige Funktion von $x, y, z, \pi, \varkappa$ ist. Es ist also

$$(27^*)\qquad \mathfrak{m}\, dy - \mathfrak{a}\, d\pi + \mathfrak{n}\, dz - \mathfrak{b}\, d\varkappa = d(g - \pi\mathfrak{a} - \varkappa\mathfrak{b}).$$

Setzen wir daher

$$(28)\qquad g - \pi\mathfrak{a} - \varkappa\mathfrak{b} = Q(x, y, z, \pi, \varkappa),$$

so wird

$$(29)\qquad \mathfrak{m} = \frac{\partial Q}{\partial y},\quad \mathfrak{n} = \frac{\partial Q}{\partial z};\qquad \mathfrak{a} = -\frac{\partial Q}{\partial \pi},\quad \mathfrak{b} = -\frac{\partial Q}{\partial \varkappa}.$$

Um die verlangte Vertauschung der Extremalen unter einander zu leisten, wird daher die Transformation (26) die Gestalt

$$(26^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta\pi}{\delta\alpha} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}, & \dfrac{\delta\varkappa}{\delta\alpha} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\delta y}{\delta\alpha} = -\dfrac{\partial Q}{\partial \pi}, & \dfrac{\delta z}{\delta\alpha} = -\dfrac{\partial Q}{\partial \varkappa} \end{cases}$$

haben müssen, wobei die Funktion Q so zu bestimmen ist, daß

$$(30)\qquad \mathfrak{p} = \frac{\partial Q}{\partial y},\quad \mathfrak{y} = -\frac{\partial Q}{\partial \pi};\quad \mathfrak{k} = \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \mathfrak{z} = -\frac{\partial Q}{\partial \varkappa}$$

eine Lösung der Jacobischen Gleichungen (21) ist. Sind aber

$$\pi = \pi(x, a),\ y = y(x, a),\qquad \varkappa = \varkappa(x, a),\ z = z(x, a)$$

irgend welche den Parameter a enthaltende Lösungen des kanonischen Systems (5), so sind auch

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial\pi}{\partial a},\quad \mathfrak{y} = \frac{\partial y}{\partial a};\quad \mathfrak{k} = \frac{\partial\varkappa}{\partial a},\quad \mathfrak{z} = \frac{\partial z}{\partial a}$$

Lösungen der Jacobischen Gleichungen (21). Nach (16*) muß daher für jedes Lösungssystem von (5), das einen Parameter a enthält, die Relation

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial Q}{\partial \pi}\frac{\partial \pi}{\partial a}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial Q}{\partial \varkappa}\frac{\partial \varkappa}{\partial a} = \text{Const.}$$

bestehen, d. h. es muß

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \text{Const.} \tag{31}$$

sein für alle x, sobald für $y, z, \pi, \varkappa$ irgend welche, den Parameter a enthaltende Lösungen des kanonischen Systems (5) eingesetzt werden. Daraus folgt aber, daß längs der Integralkurven des Systems (5) auch Q selbst konstant sein muß, es muß daher $Q(x, y, z, \pi, \varkappa) = \text{Const.}$ ein Integral des kanonischen Systems sein. Wenn umgekehrt Q ein Integral von (5) ist, so stellt (30) eine Lösung der Jacobischen Gleichungen dar[1]). Die Kenntnis eines Integrals des kanonischen Systems (5) und die einer infinitesimalen Transformation des Systems in sich sind also gleichbedeutend.

Als ein Korollar ergibt sich hieraus schließlich das Poissonsche Theorem. Haben wir zwei Integrale $Q_1(x, y, z, \pi, \varkappa) = \text{Const.}$ und $Q_2(x, y, z, \pi, \varkappa) = \text{Const.}$, so haben wir in

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial y},\quad \mathfrak{y}_1 = -\frac{\partial Q_1}{\partial \pi},\quad \mathfrak{f}_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial z},\quad \mathfrak{z}_1 = -\frac{\partial Q_1}{\partial \varkappa}$$

$$\mathfrak{p}_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial y},\quad \mathfrak{y}_2 = -\frac{\partial Q_2}{\partial \pi},\quad \mathfrak{f}_2 = \frac{\partial Q_2}{\partial z},\quad \mathfrak{z}_2 = -\frac{\partial Q_2}{\partial \varkappa}$$

zwei Lösungssysteme der Jacobischen Gleichungen und finden aus ihnen als neues Integral

$$\left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}\frac{\partial Q_2}{\partial \pi}-\frac{\partial Q_1}{\partial \pi}\frac{\partial Q_2}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z}\frac{\partial Q_2}{\partial \varkappa}-\frac{\partial Q_1}{\partial \varkappa}\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right) = \text{Const.} \tag{32}$$

§ 3.

Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch ein Extremalintegral.

Das im ersten Paragraphen dargelegte Verfahren Hamiltons, die Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen auf die

1) H. Poincaré: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste t. 1, pg. 168.

Integration seiner beiden partiellen Differentialgleichungen zurückzuführen, das dann Jacobi weiter ausgebildet hat, wird im allgemeinen als eine Erschwerung der Aufgabe anzusehen sein. Denn in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung pflegt man es umgekehrt als einen großen Fortschritt anzusehen, wenn die Integration der partiellen Differentialgleichungen auf die eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt ist. Dieses Ziel der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erreicht nun gerade Jacobi, indem er den Hamiltonschen Gedankengang umkehrt und die Integration einer vorgegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (die die unbekannte Funktion selbst nicht enthalten möge),

$$\frac{\partial V}{\partial x} = H\left(x, y, z, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{1}$$

dadurch leistet, daß er sie als Hamilton-Jacobische Differentialgleichung eines durch sie bestimmten Variationsproblems ansieht und verlangt, daß dies Variationsproblem durch direktes Studium der Euler-Lagrangeschen Gleichungen im Sinne von § 2 erledigt wird.

Wenn wir diese Auffassung jetzt darlegen wollen, so können wir nicht an die gewöhnliche Deutung eines Integrals der Gleichung (1) als einer Hyperfläche (M_3) im vierdimensionalen (x, y, z, V)-Raume anknüpfen, es erscheint vielmehr zweckmäßig, eine solche Lösung als eine Belegung des dreidimensionalen (x, y, z)-Raumes zu deuten.

Nach Lagrange fragt man in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nach dem vollständigen bezw. allgemeinen Integral. Es lassen sich leicht Extremalfelder so wählen, daß der Wert des Extremalintegrals (bezw. das Hilbertsche Unabhängigkeitsintegral) eine solche Belegung des Raumes herstellt, die dem vollständigen oder auch dem allgemeinen Integral im Sinne Lagranges entspricht.

Aus der in der Differentialgleichung (1) gegebenen Funktion $H(x, y, z, \pi, \varkappa)$ leiten wir zunächst den Integranden des Extremalintegrals $f(y', z', y, z, x)$ her, indem wir

$$y' = -\frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad z' = -\frac{\partial H}{\partial \varkappa} \tag{2}$$

setzen, diese Gleichungen nach π und $\varkappa$ auflösen und dann unter Einsetzen der berechneten Werte

$$(3) \qquad f(y', z', y, z, x) = -\pi \frac{\partial H}{\partial \pi} - \varkappa \frac{\partial H}{\partial \varkappa} + H$$

erhalten. Dann können wir die Euler-Lagrangeschen Gleichungen des zur Funktion (3) gehörigen Variationsproblems finden; wir setzen im folgenden voraus, daß deren Integralkurven, die Extremalen, nach § 2 bestimmt seien.

Der Wert des Extremalintegrals, das von einem beliebigen festen Punkte $P_0(x_0, y_0, z_0)$ aus nach allen Punkten $P(x, y, z)$ des betrachteten Bereiches hin erstreckt ist,

$$(4) \qquad V(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} E\, f(y', z', y, z, x)\, dx$$

gibt eine solche Belegung des Raumes, die als ein vollständiges Integral bezeichnet werden muß. Denn es lassen sich die Konstanten x_0, y_0, z_0 so bestimmen, daß dieses Integral ein vorgegebenes „Element" $x_1, y_1, z_1, V_1, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1, \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1$ enthält, welches die partielle Differentialgleichung befriedigt. (Dabei kommt es übrigens auf den Wert von V_1 gar nicht an, da ein Integral der Differentialgleichung (1) nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.) Legen wir nämlich eine Extremale durch den Punkt x_1, y_1, z_1 in solcher Richtung $(y')_1, (z')_1$, daß

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_1 = (f_{y'})_1, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_1 = (f_{z'})_1$$

wird, so brauchen wir nur auf dieser Extremalen den Punkt P_0 so zu wählen, daß

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x_1, y_1, z_1} E\, f(y', z', y, z, x)\, dx = V_1$$

wird, um alle Bedingungen erfüllt zu haben, da $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_1$, wegen der partiellen Differentialgleichung (1) von selbst den richtigen Wert erhält[1]).

Um nun ein beliebig vorgegebenes vollständiges Integral $V(x, y, z, a, b)$ durch eine Belegung mittels des Extremalintegrals darzustellen, geben wir zunächst den Konstanten a und b feste Werte, so daß wir ein bestimmtes partikuläres Integral $V(x, y, z)$ erhalten. Zu jedem Element dieses partikulären Integrals können wir, wie eben ausgeführt, ein zugehöriges vollständiges Integral

1) Vgl. hierzu J. Hadamard: Calcul des variations t. 1 pg. 160—163.

$V(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ konstruieren. Aus der Gesamtheit dieser vollständigen Integrale ergibt sich das partikuläre Integral, von dem wir ausgingen, dadurch, daß x_0, y_0, z_0 bestimmte Funktionen von x, y, z sind:

$$(5) \qquad x_0 = x_0(x, y, z), \quad y_0 = y_0(x, y, z), \quad z_0 = z_0(x, y, z).$$

Da nun sowohl dies partikuläre Integral, als auch die gesamten dazu konstruierten vollständigen Integrale je der Hamilton-Jacobischen Gleichung (1) genügen, so müssen die Funktionen (5) der totalen linearen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial V}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial V}{\partial z_0} dz_0 = 0$$

oder

$$(6) \qquad (f - y' f_{y'} - z' f_{z'})_0 \, dx_0 + (f_{y'})_0 \, dy_0 + (f_{z'})_0 \, dz_0 = 0$$

genügen. Die Punkte x_0, y_0, z_0 erfüllen sonach eine Fläche, welche die Extremalenschar transversal schneidet; die Extremalenschar bildet ein allgemeines Unabhängigkeitsfeld. Lassen wir jetzt die Parameter a und b in dem vollständigen Integral $V(x, y, z, a, b)$ beliebig variieren, so wird die durch Gleichung (6) bestimmte Fläche ebenfalls mit diesen Parametern variieren. Wir bekommen damit eine zweiparametrige Schar von Ausgangsflächen und also auch eine zweiparametrige Schar von Unabhängigkeitsfeldern, wie wir sie im § 1 bereits eingeführt haben, deren Belegung das allgemeinste vollständige Integral liefert.

Mit Lagrange können wir vom vollständigen zum allgemeinen Integral dadurch übergehen, daß wir aus der zweiparametrigen Schar der Transversalflächen eine einparametrige Schar herausgreifen und deren Enveloppe bilden. Dadurch bekommen wir eine bestimmte neue Fläche, zu der eine transversale Extremalschar gehört. Die dadurch bestimmte Raumbelegung entspricht dem allgemeinen Integral, sie enthält eine willkürliche Funktion, die hereinkommt, wenn wir aus der zweiparametrigen Schar der Transversalflächen eine einparametrige herausgreifen.

Also ist in der Tat die Integration der partiellen Differentialgleichung (1), auf die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt, nämlich auf die der Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(f_{y'}) - f_y = 0 \\ \dfrac{d}{dx}(f_{z'}) - f_z = 0, \end{cases}$$

welche die Kenntnis der Extremalenschar vermitteln. Die Extremalen sind nichts anderes, als die sog. Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung, eine Tatsache, die auch formal unmittelbar herauskommt, wenn wir die Gleichungen (7) durch das zugehörige kanonische System ersetzen:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\pi}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, & \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial \pi} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial z}, & \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial z}, \end{cases}$$

womit genau die von Cauchy angegebene Gestalt der Gleichungen der Charakteristiken erreicht ist. Alle Eigenschaften der Charakteristiken oder, wie man anschaulicher sagt, der „charakteristischen Streifen" müssen auch an unseren Extremalen deutlich hervortreten, nur müssen wir entsprechend unserer Deutung der Integrale von (1) an Stelle der „Tangentialebene der Hyperfläche" den „Gradienten der Belegung" setzen. Jede Integralkurve von (7) bestimmt mit ihren Richtungskoeffizienten diesen Gradienten, da

$$\frac{\partial V}{\partial y} = f_{y'}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = f_{z'}$$

ist und sich $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ dazu aus der gegebenen partiellen Differentialgleichung (1) ergibt. Haben zwei verschiedene unserer Raumbelegungen ein Element gemein, d. h. in einem Punkt des Raumes denselben Wert und den gleichen Gradienten, so haben sie längs der ganzen Charakteristik, welche von diesem Punkte ausläuft, die Elemente gemein, denn die beiden zugehörigen Unabhängigkeitsfelder müssen offenbar die ganze Extremale gemein haben, da eine solche durch Anfangspunkt und Anfangsrichtung eindeutig festgelegt ist.

Schließlich handelt es sich noch darum, eine zweiparametrige Charakteristikenschar so zu bestimmen, daß sich das zugehörige Integral von (1) für $x = x_0$ auf eine gegebene Funktion $V = \varphi(y, z)$ reduziert. Dieses „Cauchysche Problem" lautet in unserer Auffassung, eine Belegung des Raumes anzugeben, die in der Ebene $x = x_0$ vorgegebene Werte $V(x_0, y, z) = \varphi(y, z)$ annimmt. Zu seiner Lösung müssen wir von den einzelnen Punkten der Ebene $x = x_0$ aus die Extremalen im Raume legen, deren Richtung y', z' so zu bestimmen ist, daß

$$(9) \qquad f_{y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad f_{z'} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

wird. Dann haben wir in

$$(10) \qquad V(x,y,z) = \varphi(y_0, z_0) + \int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} E\, f(y', z', y, z, x)\, dx$$

(worin y_0 und z_0 Funktionen von x, y, z sind) eine Funktion, die sich zunächst gewiß für $x = x_0$ auf $\varphi(y, z)$ reduziert. Es ist zu zeigen, daß die Funktion $V(x, y, z)$ der partiellen Differentialgleichung (1) genügt. Berechnen wir ihre partiellen Ableitungen, so erhalten wir nach den Gleichungen (17*) des § 1 (pg. 8), wenn wir noch berücksichtigen, daß hier in diesen Gleichungen

$$\frac{\partial x_0}{\partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial x_0}{\partial z_0} = 0, \quad \text{sowie} \quad (f_{y'})_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}, \quad (f_{z'})_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}$$

einzusetzen ist,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x} + (f - y' f_{y'} - z' f_{z'}) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x}\right) = f - y' f_{y'} - z' f_{z'}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial y} + f_{y'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial y}\right) = f_{y'}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial z} + f_{z'} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial z}\right) = f_{z'}.$$

Da bei der Bedeutung der Funktion f nach Gleichung (3) die partielle Differentialgleichung (1) gerade aus diesen drei Gleichungen durch Elimination von y' und z' entstehen würde, so sehen wir, daß (10) in der Tat die Lösung des Cauchyschen Problems ist. Damit ist gleichzeitig gezeigt, daß das gemäß den Anfangsbedingungen (9) konstruierte Extremalenfeld ein Unabhängigkeitsfeld ist. In dieser Weise hat übrigens rechnerisch A. Mayer[1]) zuerst ein allgemeines Unabhängigkeitsfeld konstruiert.

---

1) A. Mayer: Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz. Math. Annal. 62 pg. 341 ff.

Zweiter Abschnitt.

Das Variationsproblem der Doppelintegrale.

Erstes Kapitel.

Das Variationsproblem mit einer unbekannten Funktion.

§ 1.

Das Variationsproblem und die Gleichung zwischen den partiellen funktionalen Ableitungen des Extremalintegrals.

1) Das Variationsproblem und die Euler-Lagrangesche Gleichung.

Das zu Grunde liegende Variationsproblem lautet hier:

Es soll in dem Doppelintegral über eine gegebene Funktion $f(z_x, z_y, z, x, y)$

$$(1) \quad I = \iint_{(S)} f(z_x, z_y, z, x, y)\, dx\, dy \quad \left(z = z(x, y),\ z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\ z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

die unbekannte Funktion $z = z(x, y)$ so bestimmt werden, daß das Doppelintegral ein Extremum wird. Dabei ist das Doppelintegral erstreckt gedacht über einen gegebenen Bereich S der (x, y)-Ebene mit der (analytischen, doppelpunktlosen) Randkurve C. Auf dieser Kurve C seien die Werte der Funktion z, die „Randwerte", als Funktion der Bogenlänge s zunächst fest vorgegeben:

$$(2) \qquad z = z(s) \text{ auf } C.$$

Die Variationsrechnung liefert als erste Bedingung für das Eintreten eines Extremums, daß die Funktion $z(x, y)$ der Euler-Lagrangeschen Gleichung genügen muß:

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x}(f_{z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{z_y}) - f_z = 0 \quad \left(f_{z_x} = \frac{\partial f}{\partial z_x},\ f_{z_y} = \frac{\partial f}{\partial z_y},\ f_z = \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Wir setzen voraus (was in dieser Allgemeinheit wohl noch nicht bewiesen ist), daß es im allgemeinen eine und nur eine Fläche $z = z(x, y)$ gibt, welche die Gleichung (3) befriedigt und durch

die gegebene Raumkurve (2) hindurchgeht und dabei im Innern des Bereiches S keinen singulären Punkt enthält.

Die Variationsrechnung nennt auch hier jede Fläche, welche der Gleichung (3) Genüge leistet, eine Extremale, so daß wir unserer Voraussetzung die Fassung geben können: In dem betrachteten Bereiche des Raumes geht durch jede Raumkurve eine und nur eine Extremale hindurch.

2) Das Extremalintegral als Linienfunktion. Die Linienfunktionen und deren funktionale Ableitungen.

Umgekehrt denken wir jetzt in einem geeigneten Bereich des Raumes eine geschlossene Raumkurve L vorgegeben und durch sie eine Extremale hindurchgelegt. Wir berechnen den Wert des Integrals (1), wenn es über den von L begrenzten Bereich über die Extremale erstreckt wird (in den Formeln angedeutet durch den Buchstaben E). Für jede vorgegebene Raumkurve hat dies „Extremalintegral" einen bestimmten Wert, es ist eine „Linienfunktion":

$$I[L|] = \int\!\!\int_E f(z_x, z_y, z, x, y)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Volterra[1]), welcher solche Linienfunktionen in die Analysis eingeführt hat, betrachtet als einfachsten Spezialfall einer Linienfunktion den der „einfachen" Linienfunktion. Zu ihrer Definition gelangen wir auf folgendem Wege: Wir denken uns zwei Raumkurven L_1 und L_2 gegeben, die ein Kurvenstück l gemein haben. Unterdrücken wir das Stück l, so entsteht aus L_1 und L_2 eine neue geschlossene Raumkurve L_3 (welche wieder analytisch u. s. w. sein möge). Nimmt nun eine Linienfunktion $S[L|]$ für die drei Kurven L_1, L_2, L_3 bezw. die Werte $S[L_1|]$, $S[L_2|]$, $S[L_3|]$ an, so nennt Volterra sie „einfach", wenn die Relation

$$S[L_3|] = S[L_1|] + S[L_2|] \tag{5}$$

besteht. Das Extremalintegral $I[L|]$ ist im allgemeinen keine einfache Linienfunktion, da die Werte des Extremalintegrals von den Extremalen abhängen und diese wegen der Willkürlichkeit des Kurvenstückes l ganz unabhängig von einander sind. Man kann indessen leicht eine einfache Linienfunktion angeben. Denken wir uns im Raume drei Ortsfunktionen $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ und $C(x, y, z)$ gegeben, die der Bedingung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

genügen, so ist das Flächenintegral

$$\int\!\!\int A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy, \tag{6*}$$

genommen über eine beliebige Integrationsfläche nach dem Gaußschen Satze von der Integrationsfläche unabhängig, es stellt also zunächst eine Linienfunktion vor.

1) V. Volterra: Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Acta math. 12 (1889) pg. 233—252.

Diese Linienfunktion ist aber einfach, denn wegen der Unabhängigkeit des Integralwerts von der Integrationsfläche können wir eine beliebige durch L_3 hindurchgelegte Integrationsfläche, ohne daß der Wert des Integrals sich ändert, so deformieren, daß sie sowohl durch die Kurve L_1, als auch durch die Kurve L_2 hindurchgeht. Demnach ist in der Tat

$$S[L_3|] = S[L_1|] + S[L_2|].$$

Volterra hat auch bewiesen, daß umgekehrt jede einfache Linienfunktion sich vermöge dreier Ortsfunktionen in der angegebenen Weise durch ein von der Fläche unabhängiges Integral darstellen lassen muß.

In konsequenter Weiterbildung des Begriffs der Ableitungen einer gewöhnlichen Funktion von mehreren Veränderlichen überträgt Volterra vor allem den Begriff der Ableitung auf die Linienfunktionen. Sein Gedankengang ist der folgende: Wir fassen einen bestimmten Punkt der Raumkurve L ins Auge und ändern in einer gewissen Umgebung dieses Punktes die Raumkurve dadurch ab, daß wir jedem ihrer Punkte eine bestimmte Verschiebung δx parallel zur x-Achse erteilen. Für die so abgeänderte Raumkurve L' hat die Linienfunktion wieder einen bestimmten Wert $S[L'|]$. Volterra bildet den Ausdruck

$$\frac{S[L'|] - S[L|]}{\int \delta x \, d\sigma}, \tag{7}$$

worin der Nenner den Inhalt des von L' und L zugleich begrenzten Flächenstückes ist, σ ist dabei die Bogenlänge auf L. Der Grenzwert, dem dieser Ausdruck zustrebt, wenn sowohl δx wie die Länge σ der Umgebung des betrachteten Punktes, in der δx von Null verschieden war, irgendwie unendlich klein werden, soll von der Art des Grenzüberganges unabhängig sein; dann nennt ihn Volterra die „funktionale Ableitung nach der x-Achse“: S_x. In analoger Weise definiert er funktionale Ableitungen nach der y-Achse und der z-Achse, S_y bezw. S_z. Interpretieren wir diese drei funktionalen Ableitungen als Komponenten eines Vektors, so ist durch Volterras Operationen jedem Punkte der Raumkurve ein bestimmter Vektor (S_x, S_y, S_z) zugeordnet. Variieren wir die Kurve L, indem wir jeden ihrer Punkte um das Stück δx, δy, δz verschieben, so ist, wie Volterra zeigt, die Änderung einer Linienfunktion $S[L|]$ durch ein über L erstrecktes Integral in folgender Weise gegeben:

$$\delta S[L|] = \int_L (S_x \delta x + S_y \delta y + S_z \delta z) \, d\sigma. \tag{8}$$

Bei einer Verschiebung der Raumkurve L in sich muß offenbar $\delta S = 0$ sein, also folgt

$$S_x \frac{dx}{d\sigma} + S_y \frac{dy}{d\sigma} + S_z \frac{dz}{d\sigma} = 0, \tag{9}$$

d. h. der Vektor S_x, S_y, S_z steht senkrecht auf der Kurve L.

Wir können daher den Vektor S_x, S_y, S_z ersetzen durch das vektorielle Produkt aus dem Einheitsvektor $\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma}$ und einem anderen Vektor S_{yz}, S_{zx}, S_{xy}, so daß

$$\left\{\begin{aligned} S_x &= \frac{dz}{d\sigma} S_{zx} - \frac{dy}{d\sigma} S_{xy} \\ S_y &= \frac{dx}{d\sigma} S_{xy} - \frac{dz}{d\sigma} S_{yz} \\ S_z &= \frac{dy}{d\sigma} S_{yz} - \frac{dx}{d\sigma} S_{zx}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Von dem Vektor S_{yz}, S_{zx}, S_{xy}, dessen Komponenten wir die „funktionalen Ableitungen nach den Koordinatenebenen“ nennen wollen, ist nur seine Komponente normal zur Raumkurve bestimmt, seine Tangentialkomponente ist noch willkürlich und könnte beliebig festgelegt werden. Die Gleichung (8) geht durch Einführung des neuen Vektors in

$$\delta S[L] = \int_L \left\{ S_{yz}\left(\frac{dy}{d\sigma}\delta z - \frac{dz}{d\sigma}\delta y\right) + S_{zx}\left(\frac{dz}{d\sigma}\delta x - \frac{dx}{d\sigma}\delta z\right) + S_{xy}\left(\frac{dx}{d\sigma}\delta y - \frac{dy}{d\sigma}\delta x\right)\right\} d\sigma \tag{11}$$

über.

Es bringt manche Nachteile mit sich, daß bei dieser sich durch Symmetrie auszeichnenden Darstellung von Volterra die Komponenten der Vektoren bei der ersten Darstellung nicht unabhängig, bei der zweiten nicht vollkommen bestimmt sind. Hadamard[1]) und im Anschluß an ihn P. Lévy[2]) haben, um diese Mängel zu vermeiden, die völlige Symmetrie aufgegeben. Sie denken sich eine Raumkurve L immer gegeben durch ihre Projektion auf die (x, y)-Ebene, d. h. eine ebene Kurve C, und Angabe der zu jedem ihrer Punkte gehörigen Ordinate $z = z(s)$, wo s die Bogenlänge auf C bedeutet. Eine Linienfunktion wird so eine Funktion der ebenen Kurve C und der Funktion $z(s)$:

1) J. Hadamard: Mémoire sur le problème d'analyse rélatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Paris. Mém. sav. étrang. 23 (1908).

2) P. Lévy: Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes. Paris. Thèse 1911. — Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionelles partielles. Pal. circ. mat. Rend. 37 (1914) pg. 113–168.

$$S[L|] = S^*[C, z(s)|]. \tag{12}$$

Das Auftreten der obigen Nebenbedingung (8) wird dadurch vermieden, daß die Variation der ebenen Kurve C in der (x, y)-Ebene immer senkrecht zu dieser Kurve ausgeführt wird, die Variation der Raumkurve L ist somit durch Angabe zweier Verschiebungskomponenten $\delta n(s)$ und $\delta z(s)$ charakterisiert. Sind die zugehörigen funktionalen Ableitungen von $S[L|]$ gleich S_n^* bezw. S_z^*, so lautet der Ausdruck für die Änderung von S^*

$$\delta S^* = \int_C (S_n^* \, \delta n + S_z^* \, \delta z) \, ds. \tag{13}$$

Vergleichen wir die Formeln (11) und (13) und beachten dabei, daß

$$\left\{\begin{aligned} \delta x &= \delta n \frac{dx}{dn} = -\delta n \frac{dy}{ds} \\ \delta y &= \delta n \frac{dy}{dn} = \delta n \frac{dx}{ds} \\ d\sigma &= ds \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

ist, so finden wir

$$\begin{aligned} S_n^* \, \delta n + S_z^* \, \delta z = S_{yz} &\left(\frac{dy}{ds} \, \delta z - \frac{dz}{ds} \frac{dx}{ds} \delta n\right) \\ + S_{zx} &\left(-\frac{dz}{ds} \frac{dy}{ds} \delta n - \frac{dx}{ds} \delta z\right) + S_{xy} \cdot \delta n. \end{aligned}$$

Darnach ist der Zusammenhang zwischen den Hadamard-Lévyschen funktionalen Ableitungen und den Volterraschen Ableitungen nach den Koordinatenebenen durch die beiden Relationen

$$\left\{\begin{aligned} S_n^* &= S_{xy} - \frac{dz}{ds}\left(S_{yz} \frac{dx}{ds} + S_{zx} \frac{dy}{ds}\right) \\ S_z^* &= S_{yz} \frac{dy}{ds} - S_{zx} \frac{dx}{ds} \end{aligned}\right. \tag{15}$$

gegeben.

3) Die Grenzformel der Variationsrechnung und die funktionalen Ableitungen des Extremalintegrals.

Um jetzt die funktionalen Ableitungen des in Gleichung (4) eingeführten Extremalintegrals zu gewinnen, können wir ausgehen

von der „Grenzformel“ für Doppelintegrale. Gauß[1]) hat zuerst die Prinzipien für die Ableitung einer solchen Grenzformel an einem Beispiel aufgestellt und Poisson[2]) sie dann allgemein entwickelt. Wir leiten sie hier in folgender Weise her:

Denken wir uns eine bestimmte Raumkurve gegeben und durch sie eine Extremale gelegt. Daneben betrachten wir eine der gegebenen benachbarte Raumkurve, legen durch sie (der Einfachheit halber) wieder eine Extremale und denken jetzt die Punkte der beiden Extremalflächenstücke in beliebiger Weise ein-eindeutig auf einander bezogen, doch so, daß Punkten der Berandung wieder Punkte der Berandung entsprechen. Die Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte habe die Komponenten δx, δy, δz, so daß einem Punkte x, y, z der Ausgangsextremale der Punkt $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ der Nachbarextremale zugeordnet ist. Zur Aufstellung der Grenzformel ist es dann zweckmäßig x, y und damit auch z als Funktionen zweier Parameter u und v zu betrachten. Damit erscheinen auch δx, δy, δz und somit die Koordinaten des benachbarten Extremalflächenstücks als Funktionen von u und v. Dabei durchlaufen u und v nach der Art, wie die Beziehung beider Flächenstücke hergestellt ist, beide Male denselben Wertebereich, mag es sich um die Ausgangsextremale oder um die benachbarte handeln.

Um die Parameter u und v in das Integral (1) einzuführen, bilden wir nun mit Hadamard[3]) die zweigliedrigen Determinanten

$$(16)\quad \lambda_{(yz)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \lambda_{(zx)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \lambda_{(xy)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dann ist

$$(17)\qquad z_x = \frac{\lambda_{(xy)}}{\lambda_{(xy)}}, \quad z_y = \frac{\lambda_{(xz)}}{\lambda_{(xy)}},$$

und es wird

$$(18)\qquad f(z_x, z_y, z, x, y) = f\left(\frac{\lambda_{(xy)}}{\lambda_{(xy)}}, \frac{\lambda_{(xz)}}{\lambda_{(xy)}}, z, x, y\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_{(xy)}} F(\lambda_{(xy)}, \lambda_{(xz)}, \lambda_{(xy)}, z, x, y),$$

---

1) C. F. Gauß: Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii (1830), Werke 5, pg. 60.

2) S. D. Poisson: Paris, Mém. de l'acad. royale d. sc. 12 (1832), pg. 290.

3) Vergl. M. Fréchet: loc. cit. (pg. 6), pg. 188.

wo F homogen vom ersten Grade in den drei Determinanten ist. Also erhält das Integral (1) die Gestalt

$$I = \iint F(\lambda_{(zy)}, \lambda_{(xz)}, \lambda_{(xy)}, z, x, y)\, du\, dv. \tag{19}$$

Wenn wir jetzt für dieses Integral (19) die Variation beim Übergange von der Ausgangsextremale zur benachbarten berechnen wollen, so tritt gegenüber dem Integral (1) die große Vereinfachung ein, daß der Integrationsbereich der u, v sich bei dieser Variation nicht ändert. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}\delta I = \iint \{ & F_{\lambda_{(zy)}} \delta\lambda_{(zy)} + F_{\lambda_{(xz)}} \delta\lambda_{(xz)} + F_{\lambda_{(xy)}} \delta\lambda_{(xy)} \\ & + F_z \delta z + F_x \delta x + F_y \delta y \}\, du\, dv.\end{aligned} \tag{20}$$

Integrieren wir hier die drei ersten Terme partiell und berücksichtigen, daß in dem dann entstehenden Ausdruck das Doppelintegral herausfällt, da die Ausgangsfläche eine Extremale war, so geht die Relation (20) über in

$$\begin{aligned}\delta I = \int_L \Big\{ & F_{\lambda_{(zy)}} \left(\delta z \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dz}{d\sigma}\right) + F_{\lambda_{(xz)}} \left(\delta x \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dx}{d\sigma}\right) \\ & + F_{\lambda_{(xy)}} \left(\delta x \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dx}{d\sigma}\right) \Big\}\, d\sigma,\end{aligned} \tag{21}$$

wo das Integral über die gegebene Berandung L des Extremalenstücks, von dem wir ausgingen, zu erstrecken ist. Wollen wir schließlich wieder zu x und y als unabhängigen Veränderlichen zurückgehen, so erhalten wir zunächst durch Differentiation von (18) nach $\lambda_{(zy)}$ bezw. $\lambda_{(xz)}$:

$$f_{z_x} = F_{\lambda_{(zy)}}, \quad f_{z_y} = F_{\lambda_{(xz)}}; \tag{22}$$

weiter ist nach der Homogenitätseigenschaft von F

$$F_{\lambda_{(xy)}} = \frac{F}{\lambda_{(xy)}} - F_{\lambda_{(xz)}} \frac{\lambda_{(xz)}}{\lambda_{(xy)}} - F_{\lambda_{(yz)}} \frac{\lambda_{(yz)}}{\lambda_{(xy)}} = f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y}. \tag{23}$$

Also geht (21) über in die „Grenzformel“

$$\begin{aligned}\delta I = \int_L \Big\{ & (f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y}) \left(\delta x \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dx}{d\sigma}\right) \\ & + f_{z_x} \left(\delta z \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dz}{d\sigma}\right) + f_{z_y} \left(\delta x \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dx}{d\sigma}\right) \Big\}\, d\sigma.\end{aligned} \tag{24}$$

Durch Vergleich mit Formel (11) entnehmen wir aus dieser Grenzformel, daß die Volterraschen Ableitungen nach den Koordinatenebenen für das Extremalintegral $I[L]$:

$$(25) \qquad I_{yz} = f_{z_x}, \quad I_{xx} = f_{z_y}, \quad I_{xy} = z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} - f$$

sind, dabei ist über die an sich auftretende Unbestimmtheit (vergl. pg. 30) in bestimmter Weise verfügt, auf deren formelmäßigen Ausdruck wir gleich zurückkommen.

Diese Verfügung ist übrigens so getroffen, daß die funktionalen Ableitungen für das zu dem Variationsproblem gehörige Hilbertsche Unabhängigkeitsintegral, welches eine einfache Linienfunktion darstellt, bloße Ortsfunktionen werden (vergl. pg. 52).

Nach den Relationen (15) lauten alsdann die (Hadamard-Lévyschen) Ableitungen des Extremalintegrals in der zu (12) analogen Form $I^*[C, z(s)]$:

$$(26) \qquad \begin{cases} I_n^* = z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} - f - \dfrac{dz}{ds}\left(f_{z_x}\dfrac{dx}{ds} + f_{z_y}\dfrac{dy}{ds}\right) \\ I_z^* = f_{z_x}\dfrac{dy}{ds} - f_{z_y}\dfrac{dx}{ds}. \end{cases}$$

Man sieht, daß es hier zweckmäßig ist, die Koordinaten x und y durch die natürlichen Koordinaten auf der Kurve C zu ersetzen. Führen wir nämlich in f an Stelle von z_x und z_y die natürlichen Ableitungen

$$(27) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = z_x\dfrac{dx}{ds} + z_y\dfrac{dy}{ds} \\ \dfrac{dz}{dn} = -z_x\dfrac{dy}{ds} + z_y\dfrac{dx}{ds} \end{cases}$$

ein, wodurch es in $\bar{f}(z_s, z_n, z, x, y, x_s)$ übergehen möge[1]), so folgt sofort:

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta \bar{f}}{\partial z_s} = f_{z_x}\dfrac{dx}{ds} + f_{z_y}\dfrac{dy}{ds} \\ \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z_n} = -f_{z_x}\dfrac{dy}{ds} + f_{z_y}\dfrac{dx}{ds}. \end{cases}$$

Da weiter

$$(29) \qquad z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} = z_s \bar{f}_{z_s} + z_n \bar{f}_{z_n}$$

ist, erhalten die Relationen (26) die Gestalt

---

1) x, y, x_s bestimmen das Linienelement der Kurve C, in welchem die natürlichen Ableitungen von z gebildet werden. Dieses Linienelement ist auch bestimmt durch die Kurve C und die Bogenlänge s, welche zu dem betrachteten Punkte gehört. Die Schreibweise $\bar{f}(z_s, z_n, z, C, s)$ könnte aber zu dem Mißverständnis Anlaß geben, $\bar{f}$ als eine Linienfunktion aufzufassen.

$$(30) \qquad \begin{cases} I_n^* = & z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f} \\ I_z^* = & - \bar{f}_{z_n} \end{cases}$$

und es wird schließlich die Variation des Extremalintegrals selbst

$$(31) \qquad \delta I^*[C, z(s)|] = \int_C \{(z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f})\, \delta n - \bar{f}_{z_n}\, \delta z\}\, ds\ ^1).$$

Der Nachteil der Ableitungen (25) gegenüber den Ableitungen (30), daß sie nicht unabhängig von einander sind, tritt hier deutlich hervor; denn ist eine die Linienfunktion bestimmende Raumkurve L bezw. $C, z(s)$ vorgegeben, so kennen wir zugleich

$$\frac{dz}{ds} = z_x \frac{dx}{ds} + z_y \frac{dy}{ds}$$

und damit eine Relation zwischen den partiellen Ableitungen der durch L hindurchgehenden Extremalen.

4) Die Gleichung für die partiellen funktionalen Abweichungen des Extremalintegrals.

Aus den Gleichungen (25) bezw. (30) können wir schließen, daß die Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bei vorgegebenen Randwerten im Prinzip geleistet wäre, wenn das Extremalintegral $I[L|]$ als Funktion der Randkurve L bekannt wäre. Denn wir könnten dann für jeden Punkt der Randkurve die funktionalen Ableitungen von $I[L|]$ bilden, würden daraus für jeden Punkt der Randkurve die Richtungskosinus der Tangentialebene der durch L gehenden Extremalfläche berechnen und könnten damit die Extremale nach einer auf Cauchy zurückgehenden Methode (durch eine Potenzentwicklung) konstruieren. Wir wissen a priori, daß sich dabei eine Fläche ergeben muß, welche im Inneren des von der Randkurve L begrenzten Bereiches singularitätenfrei ist.

Um aus dieser Überlegung einen Vorteil ziehen zu können, ist es erforderlich, für das Extremalintegral $I[L|]$ eine direkte Bestimmung zu finden, welche die Kenntnis der Extremalen, die wir bisher ja benötigten, um $I[L|]$ bilden zu können, nicht voraussetzt. Ein solcher direkter Ansatz kann durch Verallgemeinerung des Hamiltonschen Gedankengangs von pg. 12 angegeben werden. Lösen wir die beiden ersten Gleichungen (25)

1) Das Vorzeichen weicht von dem der entsprechenden Formeln des ersten Abschnitts dadurch ab, daß die Richtung der inneren Normale des Integrationsbereichs positiv gezählt wird, während dort dx positiv gerechnet wurde, wenn es von dem Integrationsintervall aus nach außen zeigte (vgl. pg. 12).

$$f_{z_x} = I_{yz}, \quad f_{z_y} = I_{zx}$$

nach z_x und z_y auf und führen unter Einsetzen der berechneten Werte von z_x und z_y die neue Funktion

(32) $$H(z, x, y, I_{yz}, I_{zx}) = z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} - f$$

ein, so ergibt sich nach der dritten der Gleichungen (25) zwischen den partiellen funktionalen Ableitungen des Extremalintegrals $I[L]$ die Gleichung

(33) $$I_{xy} = H(z, x, y, I_{yz}, I_{zx}).$$

Aus

$$H(z, x, y, \pi, \varkappa) = z_x . \pi + z_y . \varkappa - f(z_x, z_y, z, x, y)$$

folgt unmittelbar

$$z_x = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad z_y = \frac{\partial H}{\partial \varkappa},$$

für die funktionalen Ableitungen erhalten wir daraus die weitere Bedingungsgleichung für jeden Punkt von L

(33*) $$\frac{dz}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \pi}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial H}{\partial \varkappa}\cdot\frac{dy}{d\sigma},$$

wobei $\pi = I_{yz}$, $\varkappa = I_{zx}$ einzusetzen sind. Dies ist der analytische Ausdruck der Bedingung, welcher wir oben in (25) die funktionalen Ableitungen Volterras unterworfen hatten, um in ihnen die vorhandene Unbestimmtheit zu beseitigen[1]).

Berücksichtigen wir andrerseits in der Hadamard-Lévyschen Auffassung, daß auf der Kurve $L = [C, z(s)]$ mit $z(s)$ auch die Ableitung $\frac{dz}{ds}$ bekannt ist, so braucht aus den Gleichungen (30) nur $\frac{dz}{dn}$ eliminiert zu werden, um eine partielle funktionale Differentialgleichung für das Extremalintegral zu erhalten. Berechnen wir daher z_n aus der Gleichung

$$-\bar{f}_{z_n} = I_z^*$$

und führen hier unter Einsetzen des berechneten Wertes die neue Funktion

(34) $$K(I_z^*, z_s, z, x, y, x_s) = z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f}$$

ein, so lautet jetzt die partielle funktionale Differentialgleichung nach der ersten Gleichung (30)

(35) $$I_n^* = K(I_z^*, z_s, z, x, y, x_s).$$

Um jetzt die Frage zu untersuchen, wie weit das Extremalintegral durch die Gleichungen (33) bezw. (35) bestimmt ist, wollen

1) Diese Bedingung dem Inhalte nach bei M. Fréchet, loc. cit. (pg. 6), pg. 194.

wir zunächst an die Stelle der Bestimmung des Extremalintegrals $J\,|\,L\,|$ durch die Randkurve L auf pg. 39 eine etwas andere setzen. In etwas vager Weise pflegt man zu sagen, daß das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung wie (3) von zwei willkürlichen Funktionen abhänge [1]). Um solche zwei Funktionen in der Definition des Extremalintegrals (4) hervortreten zu lassen, wollen wir uns statt der bisher betrachteten einen Raumkurve L deren zwei L_1 und L_2 vorgegeben denken, von denen wir voraussetzen wollen, daß sie sich (ebenso wie auch ihre Projektionen auf die (x, y)-Ebene) nicht schneiden. Auch durch diese beiden Raumkurven L_1 und L_2 ist nach dem auf pg. 38 vorausgesetzten Satze über die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für die Euler-Lagrangesche Gleichung eine und nur eine Extremale bestimmt, welche im Inneren des von den beiden Kurven L_1 und L_2 begrenzten Bereichs singularitätenfrei ist [2]). Das Extremalintegral würde dann als Funktion der beiden Raumkurven L_1 und L_2 erscheinen, die zusammen erst die Begrenzungslinie L des zweifach zusammenhängenden Bereiches bilden, es erfüllt mit seinen funktionalen Ableitungen für jeden Punkt beider Randkurven die Gleichung (33) bezw. die Gleichung (35).

Hieraus wird sofort klar, daß nicht irgend eine Linienfunktion, welche der Gleichung (33) bezw. (35) genügt, die Rolle des Extremalintegrals bei der Lösung der Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichung (3) (im alten Sinne von pg. 38) für eine Kurve L spielen kann. Denn, denken wir eine feste Raumkurve L_0 vorgegeben, so ist durch L_0 und L ebenfalls eine Extremale bestimmt und der zugehörige Wert des Extremalintegrals, welcher auch als Linienfunktion von L erscheint, wird mit seinen funktionalen Ableitungen die Gleichung (33) bezw. (35) erfüllen. Die Tangentialebenen längs L an diese zweite Extremale haben aber gar nichts zu tun mit den Tangentialebenen an diejenige Extremale, welche die Randwertaufgabe für die Kurve L im alten Sinne löst, nämlich so, daß der von L umschlossene Bereich von einfachem Zusammenhange ohne Singularitäten ist. Die Schwierigkeit wird sein, aus der Gesamtheit der Lösungen der partiellen funktionalen Differentialgleichung gerade das Extremalintegral auszusondern.

---

1) Vergl. É. Goursat, Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du second ordre. t. 1. Paris (1896), pg. 31.

2) Vergl. ein Beispiel bei É. Picard, Traité d'analyse. t. 2. (2. Aufl.) Paris (1905), pg. 86.

Diese Schwierigkeit können wir in analoger Weise umgehen, wie Jacobi es beim Problem der einfachen Integrale tat, als er von den beiden Hamiltonschen Gleichungen zu der Hamilton-Jacobischen Gleichung überging. Wir wollen in dem betrachteten Bereiche des Raumes eine bestimmte Kurve L_0 fest vorgeben und wollen alle geschlossenen Raumkurven L des Bereiches je mit L_0 durch eine Extremale verbunden denken. Der Wert des Extremalintegrals, das von L_0 nach L erstreckt ist,

$$I = \int_{L_0}^{L} E f(z_x, z_y, z, x, y)\, dx\, dy \tag{36}$$

ordnet jeder Raumkurve L einen bestimmten Zahlwert zu. Es ist damit also eine Linienfunktion definiert; sie genügt der Gleichung (33) bezw. (35) und zwar stellt sie, wenn wir die Anfangskurve L_0 als willkürlich ansehen, in Übereinstimmung mit der Definition von P. Lévy[1]), ein vollständiges Integral dieser Gleichung vor. Die Kenntnis dieses vollständigen Integrals führt unmittelbar zur Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichung (3); denn bilden wir auf $L_0 = [C_0, z_0(s_0)]$ die Ableitung $I^*_{z_0}$, so haben wir damit auf L_0 die Kenntnis der normalen Ableitung $\frac{dz}{dn}$ für die Extremale. Setzen wir daher

$$I^*_{z_0} = \xi(s_0), \tag{37}$$

wo ξ eine willkürliche Funktion ist, so haben wir damit allgemein die Extremalen der Euler-Lagrangeschen Gleichung gefunden. Die Lösung der Randwertaufgabe für zwei vorgegebene Kurven $[C_0, z_0(s_0)]$ und $[C, z(s)]$ würde freilich noch erfordern, daß $\xi(s_0)$ auf C_0 so bestimmt wird, daß die Extremale durch $L = [C, z(s)]$ hindurchgeht

5) *Das „Funktionsfeld" der Extremalen und die partielle funktionale Differentialgleichung.*

Das Hilfsmittel, das wir soeben zur Vereinfachung der Integration der partiellen funktionalen Differentialgleichung benützt haben, bestand darin, aus der von zwei willkürlichen Funktionen abhängigen Gesamtheit der Extremalen des vorgelegten Variationsproblems alle diejenigen herauszugreifen, die durch eine feste Kurve L_0 hindurchgehen, eine Menge, welche nur noch von einer willkürlichen Funktion abhängt. Eine solche von einer willkürlichen Funktion abhängige Menge von Extremalen können wir aber auch in allgemeinerer Weise bestimmt denken.

1) P. Lévy, loc. cit. (pg. 6[4]), pg. 156ff., sowie § 3 dieses Kapitels.

Wir grenzen dadurch einen bestimmten Bereich des Raumes ab, daß wir x und y in einem von zwei geschlossenen Kurven C_0' und C_1', welche einander umschließen mögen, begrenzten Ringfläche der (x, y)-Ebene variieren lassen, während für z die Ungleichung $z_1 < z < z_2$ bestehen möge. In diesem Bereiche wollen wir uns eine Menge von Extremalen so gegeben denken, daß durch jede geschlossene Kurve L, die im Bereiche verläuft und sich in ihm nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt, eine und nur eine Extremale hindurchläuft. Diese Eigenschaft ist analog der, welche bei einer nur von einem Parameter abhängigen Extremalschar als Definition eines Extremalenfeldes dient: wir wollen hier eine Menge von Extremalen, welche die verlangte Eigenschaft besitzt, mit ähnlichem Namen ein „Funktionsfeld" nennen, ein Name, der ausdrücken soll, daß eine Kurve zur Charakterisierung der einzelnen Extremale innerhalb der Menge nötig ist.

In einem solchen Funktionsfelde können wir mit Hilfe des Extremalintegralwerts eine Linienfunktion definieren: wir brauchen nur auf jeder Extremale des Funktionsfeldes eine Anfangskurve $L_0 = [C_0, z_0(s_0)]$ vorgegeben zu denken, von der aus das Extremalintegral zu erstrecken ist. Die beiden zu L_0 gehörigen Bestimmungsstücke C_0 und $z_0(s_0)$ sind durch einander bedingt, da ja L_0 immer auf der durch L bestimmten Extremalen liegen soll, sodaß durch die Variation δz_0 von z_0 die Variation δn_0 von C_0 bestimmt ist. Dabei soll immer vorausgesetzt werden, daß sich L_0 stetig ändert, wenn sich L irgendwie stetig im Funktionsfelde bewegt.

Wir wollen jetzt untersuchen, wann die so definierte Linienfunktion

$$W[L] = \int_{L_0}^{L} E\!\int f(z_x, z_y, z, x, y)\, dx\, dy \tag{38}$$

der partiellen funktionalen Differentialgleichung (35) genügt. Um die funktionalen Ableitungen von W zu bestimmen, wollen wir die Grenzformel der Variationsrechnung (31) anwenden. Dabei ist zu beachten, daß die Begrenzung des Flächenstücks der Extremale aus den beiden Kurven L_0 und L besteht; bei der Integration nach Formel (31), die über die gesamte Begrenzung zu erstrecken ist, werden die zu L und L_0 gehörigen Kurven C bezw. C_0 im entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Wollen wir C_0 in demselben Sinne durchlaufen wie C, so ist das Vorzeichen des zugehörigen Integrals zu ändern, wir erhalten demnach

$$\delta W = \int_C \{(z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f})\,\delta n - \bar{f}_{z_n}\,\delta z\}\, ds - \int_{C_0} \{(z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f})\,\delta n_0 - \bar{f}_{z_n}\,\delta z_0\}\, ds_0. \tag{39}$$

Dabei ist δz_0 und folglich auch δn_0 durch die Angabe von δz und δn auf L bestimmt, da ja $[C_0, z_0(s_0)]$ eine Linienfunktion von L ist; die Variationen δz_0 und δn_0 werden folgende Gestalt besitzen:

$$(40)\qquad \begin{cases} \delta z_0(s_0) = \int_C \{\delta z_0'(s_0, s)\,\delta n + \delta z_0''(s_0, s)\,\delta z\}\,ds \\ \delta n_0(s_0) = \int_C \{\delta n_0'(s_0, s)\,\delta n + \delta n_0''(s_0, s)\,\delta z\}\,\delta s. \end{cases}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in (39) einführen, so ergeben sich für die funktionalen Ableitungen von $W[L] = W^*[C, z(s)]$ die Werte

$$(41)\qquad \begin{cases} W_n^* = z_n\bar{f}_{z_n} - \bar{f} - \int_{C_0} \{(z_n\bar{f}_{z_n} - \bar{f})\,\delta n_0' - \bar{f}_{z_n}\delta z_0'\}\,ds_0 \\ W_z^* = -\bar{f}_{z_n} - \int_{C_0} \{(z_n\bar{f}_{z_n} - \bar{f})\,\delta n_0'' - \bar{f}_{z_n}\delta z_0''\}\,ds_0 \end{cases}$$

Hieraus kann man ersehen, daß der Extremalintegralwert (38) nur dann eine Lösung der Gleichung (35) und darnach auch der Gleichung (33) liefert, wenn die in (41) auftretenden Integrale verschwinden für alle Variationen δn_0, δz_0. Diese zusammengehörigen Variationen müssen daher immer die Bedingung

$$(42)\qquad (z_n\bar{f}_{z_n} - \bar{f})\big|^{C_0}\delta n_0 - \bar{f}_{z_n}\big|^{C_0}\delta z_0 = 0$$

erfüllen. Gehen wir in dieser Relation vermöge der Gleichungen (14) und (27), (28) zu den Koordinaten x und y zurück, so erhält sie die Gestalt

$$(42^*)\qquad \frac{dy}{ds_0}\left[(f - z_x f_{z_x})^{L_0}\delta x_0 - (z_y f_{z_x})^{L_0}\delta y_0 + (f_{z_x})^{L_0}\delta z_0\right]$$
$$-\frac{dx}{ds_0}\left[-(z_x f_{z_y})^{L_0}\delta x_0 + (f - z_y f_{z_y})^{L_0}\delta y_0 + (f_{z_y})^{L_0}\delta z_0\right] = 0,$$

und da die Kurve L_0 auf der betrachteten Extremale willkürlich angenommen werden konnte, folgen hieraus die beiden Gleichungen

$$(43)\qquad \begin{cases} (f - z_x f_{z_x})^{L_0}\delta x_0 - (z_y f_{z_x})^{L_0}\delta y_0 + (f_{z_x})^{L_0}\delta z_0 = 0 \\ -(z_x f_{z_y})^{L_0}\delta x_0 + (f - z_y f_{z_y})^{L_0}\delta y_0 + (f_{z_y})^{L_0}\delta z_0 = 0. \end{cases}$$

Lösen wir dieses System auf, so folgt für die Komponenten der Verschiebung auf L_0 die Bedingung

$$(43^*)\qquad \delta x_0 : \delta y_0 : \delta z_0 = (f_{z_x})^{L_0} : (f_{z_y})^{L_0} : (z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} - f)^{L_0}.$$

Würden wir aus dem Funktionsfelde ein Parameterfeld (also eine einparametrige Flächenschar) herausgreifen, so würden in diesen Gleichungen (43*) die partiellen Ableitungen der Extremalen z_x, z_y Funktionen des Ortes $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ in dem betrachteten Bereiche des Raumes werden. Die Gleichungen würden dann eine zweiparametrige Kurvenschar bestimmen, welche die Flächenschar durchsetzt und ebenso wie diese einparametrige Schar der Feldextremalen den Bereich des Raumes einfach und lückenlos erfüllt. Wir wollen die Kurven dieser zweiparametrigen Schar die „Transversalen“ des Feldes nennen.

Ebenso wie sich nach den Gleichungen (43*) zu jedem Parameterfelde eine Transversalenschar bestimmen läßt, so ist auch jedes solche Feld ein „Unabhängigkeitsfeld“, d. h. es gilt in ihm der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz; das Hilbertsche Integral

$$I^* = \iint \{ f(p, q, z, x, y) + (z_x - p) f_p + (z_y - q) f_q \} \, dx \, dy$$

ist von der Integrationsfläche unabhängig, es stellt sonach (wie der Extremalintegralwert) eine Linienfunktion vor, und zwar ist es speziell eine einfache Linienfunktion. Seine funktionalen Ableitungen (nach Volterra)

$$I^*_{yz} = f_p, \quad I^*_{xz} = f_q, \quad I^*_{xy} = p f_p + q f_q - f$$

welche bloße Funktionen des Ortes sind, genügen der funktionalen partiellen Differentialgleichung (nach Volterra) (33). Das Unabhängigkeitsintegral stellt sonach eine Lösung dieser Differentialgleichung vor.

Betrachten wir das Parameterfeld, aus dem wir das Unabhängigkeitsintegral gewannen, als einer Schar von Feldern angehörig, so hängen die Gefällfunktionen p und q außer von x, y, z noch von den Parametern der Schar, z. B. dem Parameter a ab. Damit ist auch das Unabhängigkeitsintegral selbst eine Linienfunktion, die noch von dem Parameter a abhängt. Die Differentiation von I^* nach a liefert die Relation

$$\frac{\partial I^*}{\partial a} = \int\int \left\{ (z_x - p) \frac{\partial f_p}{\partial a} + (z_y - q) \frac{\partial f_q}{\partial a} \right\} dx \, dy,$$

aus der hervorgeht, daß auf den einzelnen Feldextremalen

$$\frac{\partial I^*}{\partial a} = \text{Const.} = b$$

ist.

Dieser Satz ist identisch mit der Verallgemeinerung des Jacobischen Satzes bei einfachen Integralen durch M. Fréchet (loc. cit. pg. 196 ff.). Diese formale Übertragung vermag aber für die Lösung der Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichung (3) keine Dienste zu leisten. (Vergleiche hierzu Nr. 6.)

6) Die Funktionsfelder und die Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichung.

Man kann leicht ein Funktionsfeld konstruieren, welches der Bedingung (42) genügt. Dafür brauchen wir nur über einem

bestimmten, zweifach zusammenhängenden Bereich der (x, y)-Ebene eine Fläche gegeben zu denken. Zu jeder geschlossenen Kurve C_0 des gegebenen Bereichs (welche sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt), gehört eine bestimmte Kurve L_0 auf der Fläche und in jedem Punkte von L_0 haben $\frac{dz}{ds}$ und $\frac{\delta z}{\delta n}$, die sich ja auf die Fläche beziehen, ganz bestimmte Werte. Aus Gleichung (42) läßt sich also für jeden Punkt von L_0 die normale Ableitung ε_n für eine Extremale berechnen, die Extremale selbst kann sonach konstruiert werden. Die Gesamtheit der so erhaltenen Extremalen stellt in der Tat ein Funktionsfeld dar, und der Extremalintegralwert, der jeder Raumkurve L zugehört, bildet ein Integral der partiellen funktionalen Differentialgleichung.

Eine Lösung der Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichung kann natürlich aus einem festen Funktionsfelde nicht gewonnen werden, da darin nur eine willkürliche Funktion verfügbar ist. Um die Randwertaufgabe angreifen zu können, müssen wir uns eine Menge von Funktionsfeldern gegeben denken, welche noch von einer weiteren willkürlichen Funktion abhängt. Wir können etwa denken, daß wir statt der einen Fläche, welche wir eben benützt haben, eine Menge solcher Flächen haben, von denen die einzelne immer durch Angabe einer bestimmten Funktion $\alpha(t)$ des Parameters t charakterisiert ist, wobei der Parameter t in einem bestimmten Intervalle, etwa von 0 bis 1 variieren möge. Für jede Wahl der Funktion $\alpha(t)$ im Intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ haben wir dann ein bestimmtes Funktionsfeld. Der Extremalintegralwert ist dann ein Funktional, das außer von der Kurve L noch von der Funktion $\alpha(t)$ abhängt:

$$I = I[L,\ \alpha(t)\,|_0^1]. \tag{44}$$

Variieren wir die Funktion $\alpha(t)$, so geht die Anfangskurve L_0 der einzelnen Extremale des Funktionsfeldes in eine neue Kurve L_0' über; dabei sind die Verschiebungen ihrer Punkte gegeben durch

$$\delta n_0(s_0) = \int_0^1 \delta n_0^*(s_0, t)\,\delta\alpha(t)\,dt, \quad \delta z_0(s_0) = \int_0^1 \delta z_0^*(s_0, t)\,\delta\alpha(t)\,dt.$$

Folglich ist nach der Grenzformel der Variationsrechnung, wenn wir die Kurve L festhalten, die funktionale Ableitung von I nach $\alpha(t)$ gegeben durch

$$I_\alpha = \int_{C_0} \{(z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f})\,\delta n_0^* - \bar{f}_{z_n}\,\delta z_0^*\}\,ds_0.$$

Demnach hat diese Ableitung für alle Kurven L die auf derselben Extremalen des Funktionsfeldes liegen, den gleichen Wert, es ist für die einzelnen Extremalen I_α eine Funktion allein von t:

$$I_\alpha [L, \alpha(t)\Big|_0^1; t] = c(t). \tag{45}$$

Um jetzt die Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichung (3) für zwei vorgegebene Kurven L_1 und L_2 zu lösen, denken wir uns zunächst für ein festgewähltes $\alpha(t)$ die zu den beiden Kurven gehörigen Werte des Extremalintegrals gebildet: $I_1 = I[L_1, \alpha(t)|]$ bezw. $I_2 = I[L_2, \alpha(t)]$. Für die funktionalen Ableitungen nach α für denselben Parameterwert t erhalten wir nach (45):

$$(I_1)_\alpha = c_1(t), \quad (I_2)_\alpha = c_2(t).$$

Sollen beide Kurven auf ein und derselben Extremalen liegen, so müßte $c_1(t) = c_2(t)$ sein, also

$$(I_1)_\alpha - (I_2)_\alpha = 0,$$

woraus sich die Funktion $\alpha(t)$ bestimmt. Die Randwertaufgabe ist damit gelöst: denn wenn wir auf L_1 oder L_2 die funktionalen Ableitungen des mit der berechneten Funktion $\alpha(t)$ gebildeten Extremalintegrals nach z bilden, so erhalten wir eine Gleichung für die normale Ableitung der gesuchten Extremale.

§ 2.

Integrationstheorie der Euler-Lagrangeschen Gleichung und der zugehörigen kanonischen Systeme.

Die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_{z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{z_y}) - f_z = 0, \tag{1}$$

welche aus dem Variationsproblem

$$I = \iint f(z_x, z_y, z, x, y)\, dx\, dy = \text{Extrem.} \tag{2}$$

entsprang, ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die dadurch ausgezeichnet ist, daß sie die zweiten Ableitungen der unbekannten Funktion $z(x, y)$ nur linear enthält.

1) Das zugehörige erste kanonische System.

Die willkürlichen Funktionen, welche in der allgemeinen Lösung von (1) auftreten, legten wir im vorigen Paragraphen zuerst dadurch fest, daß wir der Extremalen vorschrieben, durch

eine gegebene Raumkurve hindurchzugehen, und verlangten, daß das von dieser Raumkurve begrenzte Flächenstück der Extremale singularitätenfrei sei. Diese einfachste Form der Randwertaufgabe verallgemeinerten wir dann dahin, daß wir zwei Raumkurven vorgaben und eine Extremale so zu bestimmen verlangten, daß sie durch beide Raumkurven hindurchgehe und im Inneren des von beiden Raumkurven begrenzten, zweifach zusammenhängenden Bereichs keinen singulären Punkt enthalte.

Im Sinne der allgemeinen Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen würde man hingegen eine bestimmte Integralfläche dadurch festzulegen suchen, daß man ihr vorschreibt, nur durch eine gegebene Raumkurve zu gehen, dafür aber in jedem Punkte dieser Raumkurve eine gegebene Ebene als Tangentialebene zu besitzen, also längs der Raumkurve eine gegebene abwickelbare Fläche zu berühren. Diese geometrisch formulierte Bedingung bedeutet analytisch, daß längs einer vorgegebenen geschlossenen Kurve C_0 der (x, y)-Ebene der Wert von $z = z(s_0)$, (womit wir gleichzeitig auf C_0 die Ableitung $\frac{dz}{ds_0}$ kennen), sowie die normale Ableitung $\frac{dz}{dn}$ der Extremale vorgegeben ist. Cauchy hat gezeigt, daß durch diese vorgeschriebenen Anfangswerte eine Integralfläche im allgemeinen eindeutig bestimmt ist und hat weiter ausgeführt, wie sie sich durch einen Potenzreihenansatz wirklich herstellen läßt in Erweiterung des Verfahrens, welches man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen als „calcul des limites“ bezeichnet[1]).

Man könnte daran denken, daß es bei der Durchführung dieses Problems zweckmäßig sein würde, die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung aufzulösen in analoger Weise, wie wir im § 2 des vorigen Kapitels die Euler-Lagrangeschen Gleichungen durch das kanonische System ersetzten. Wollten wir formal den dortigen Gedankengang auf das vorliegende Problem übertragen[2]), so müßten wir auf die gegebene Funktion f die Legendresche Transformation anwenden, also neue Veränderliche π und $\varkappa$ durch die Relation

$$\pi = f_{z_x}, \quad \varkappa = f_{z_y} \tag{3}$$

1) É. Goursat, loc. cit. (pg. 48), t. 1, pg. 24—28.

2) V. Volterra, Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni. Roma, Acc. Lincei Rend. (4) 6 [1] (1890), pg. 43.

einführen. Berechnet man aus diesen beiden Gleichungen z_x und z_y

$$(3^*) \qquad z_x = p(\pi, \varkappa, z, x, y), \quad z_y = q(\pi, \varkappa, z, x, y)$$

und führt in Übereinstimmung mit Gleichung (32) des § 1 unter Einsetzen dieser Werte die neue Funktion

$$(4) \qquad H(\pi, \varkappa, z, x, y) = pf_p + qf_q - f$$

ein, so gelten die Relationen

$$\frac{\partial H}{\partial \pi} = p, \quad \frac{\partial H}{\partial \varkappa} = q, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z}$$

und also geht die Euler-Lagrangesche Gleichung (1) über in das System

$$(5) \qquad \begin{cases} z_x = \dfrac{\partial H}{\partial \pi}, \quad z_y = \dfrac{\partial H}{\partial \varkappa} \\ \pi_x + \varkappa_y = -\dfrac{\partial H}{\partial z}, \end{cases}$$

das wir das erste kanonische System (nach Volterra) nennen wollen.

Dies ist, wie man sich leicht überzeugt, mit der Euler-Lagrangeschen Gleichung (1) äquivalent. Aber bei der Frage nach der Existenz eines Integrals und der Feststellung der eingehenden Willkürlichkeit, welche man mit Hilfe der von Cauchy und S. von Kowalewski angegebenen Methode erledigen kann, zeigt sich, wie zu erwarten ist, daß man nicht auf einer Kurve C_0 der (x, y)-Ebene die Werte von z, π und $\varkappa$ willkürlich vorgeben kann. Die Integrabilitätsbedingung, die man aus den beiden ersten der Gleichungen (5) unmittelbar herleitet, zeigt, daß eine Relation zwischen den Anfangswerten auf C_0 bestehen muß. Wir können etwa nur für z und eine der beiden anderen Funktionen π oder $\varkappa$, oder auch für eine bestimmte Kombination beider die Anfangswerte vorschreiben. Dadurch, daß die Anfangswerte von z, π und $\varkappa$ nicht willkürlich vorgegeben werden können, gehen wir aber aller Vorteile verlustig, welche im § 2 des vorigen Kapitels die Einführung des kanonischen Systems mit sich brachte, nämlich der Übersichtlichkeit der geometrischen Darstellung der Lösungen. Dort ging von jedem Punkt des Raumes eine ganz bestimmte Extremale aus; wollten wir dagegen hier die Lösungen des Systems (5) als Flächen (M_2) in einem fünfdimensionalen $(x, y, z, \pi, \varkappa)$-Raume interpretieren, so würde nicht durch jede Kurve des Raumes eine Extremale hindurchgehen, sondern nur durch solche Kurven, die noch einer bestimmten Bedingung genügen.

2) Die zweite Form des kanonischen Systems.

Diese Schwierigkeit, welche darin besteht, daß auf einer geschlossenen Kurve C der (x, y)-Ebene mit $z(s)$ auch $\frac{dz}{ds}$ bekannt ist, und welche offenbar genau die gleiche ist, wie sie im vorigen Paragraphen für die funktionalen Ableitungen einer Linienfunktion (nach Volterra) vorlag, können wir in ähnlicher Weise wie die letztere umgehen. Um von der Kurve C_0 aus, auf welcher z und $\frac{dz}{dn}$ als Funktionen der Bogenlänge s_0 gegeben sind, die Integralfläche zu konstruieren, etwa bis zu einer zweiten geschlossenen Kurve C in der (x, y)-Ebene hin, welche, um einen konkreten Fall vor Augen zu haben, von der Kurve C_0 umschlossen werden möge, wollen wir uns den Bereich zwischen den beiden Kurven C_0 und C von einer einparametrigen Kurvenschar C_α, welche C_0 und C enthält, einfach und lückenlos ausgefüllt denken. Ferner konstruieren wir zu dieser Kurvenschar C_α die Schar ihrer orthogonalen Trajektorien, welche ebenfalls den Bereich zwischen C_0 und C einfach und lückenlos erfüllt, und deren Parameter wir mit β bezeichnen wollen.

Führen wir die Parameter α und β dieser beiden Kurvenscharen als Koordinaten in der (x, y)-Ebene ein

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \tag{6}$$

so geht auch z in eine Funktion von α und β über

$$z = z(\alpha, \beta) \tag{6*}$$

und es wird

$$f(z_x, z_y, z, x, y) = \bar{\bar{f}}(z_\alpha, z_\beta, z, \alpha, \beta), \tag{7}$$

so daß das Variationsproblem (2) jetzt lautet:

$$I = \iint \bar{\bar{f}}(z_\alpha, z_\beta, z, \alpha, \beta)\, \Delta\, d\beta\, d\alpha = \text{Extrem.} \tag{8}$$

Dabei ist die Funktionaldeterminante Δ der x, y nach den α, β wegen der Orthogonalität der neuen Koordinatenlinien

$$\Delta = \sqrt{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\,(x_\beta^2 + y_\beta^2)}. \tag{9}$$

Die Euler-Lagrangesche Gleichung (1) erhält sonach in den neuen Koordinaten die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\bar{\bar{f}}_{z_\alpha} \cdot \Delta) + \frac{\partial}{\partial \beta}(\bar{\bar{f}}_{z_\beta} \cdot \Delta) - \bar{\bar{f}}_z \cdot \Delta = 0$$

oder nach Einsetzen von Δ aus (9)

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\overline{\overline{f}}_{z_\alpha}\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\overline{\overline{f}}_{z_\beta}\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}\right) \\ +\dfrac{\overline{\overline{f}}_{z_\alpha}}{\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}\right)+\dfrac{\overline{\overline{f}}_{z_\beta}}{\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}\right)-f_z=0. \end{cases}$$

Unter Benützung der Orthogonalitätseigenschaft der Parameterlinien

$$(11)\qquad x_\alpha\,.\,x_\beta+y_\alpha\,.\,y_\beta=0$$

verifiziert man sofort

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}\right)=\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}\cdot\dfrac{y_\beta x_{\beta\beta}-x_\beta y_{\beta\beta}}{x_\beta^2+y_\beta^2}=-\sqrt{(x_\alpha^2+y_\alpha^2)\,(x_\beta^2+y_\beta^2)}\cdot\dfrac{1}{\varrho_\alpha}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\sqrt{x_\beta^2+y_\alpha^2}\right)=\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}\cdot\dfrac{x_\alpha y_{\alpha\alpha}-y_\alpha x_{\alpha\alpha}}{x_\alpha^2+y_\alpha^2}=+\sqrt{(x_\alpha^2+y_\alpha^2)\,(x_\beta^2+y_\beta^2)}\cdot\dfrac{1}{\varrho_\beta}, \end{cases}$$

wo ϱ_α der Krümmungsradius der Kurve C_α in dem betrachteten Punkte, ϱ_β derjenige der zugehörigen orthogonalen Trajektorie ist. Die Euler-Lagrangesche Gleichung (10) erhält dann die Gestalt

$$(13)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\overline{\overline{f}}_{z_\alpha}\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\overline{\overline{f}}_{z_\beta}\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}\right) \\ &-\frac{1}{\varrho_\alpha}\cdot\overline{\overline{f}}_{z_\alpha}\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}+\frac{1}{\varrho_\beta}\overline{\overline{f}}_{z_\beta}\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}-\overline{\overline{f}}_z=0. \end{aligned}$$

Führen wir in diese Relation die natürlichen Koordinaten der Bogenlänge auf den Parameterlinien ein! Wird die Bogenlänge auf den Kurven C_α mit s bezeichnet, die auf den orthogonalen Trajektorien mit n, so ist

$$(14)\qquad ds=\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}\,d\beta,\quad dn=\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}\,d\alpha$$

und also

$$(15)\qquad z_s=\frac{z_\beta}{\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2}},\quad z_n=\frac{z_\alpha}{\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}},$$

sowie weiter

$$(16)\qquad \overline{\overline{f}}_{z_s}=\overline{\overline{f}}_{z_\beta}\sqrt{x_\beta^2+y_\beta^2},\quad \overline{\overline{f}}_{z_n}=\overline{\overline{f}}_{z_\alpha}\sqrt{x_\alpha^2+y_\alpha^2}.$$

Durch Einführung dieser neuen Größen wird (13) auf die Form

$$(17)\qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(\overline{\overline{f}}_{z_n}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\overline{\overline{f}}_{z_s}\right)-\frac{1}{\varrho_s}\overline{\overline{f}}_{z_n}+\frac{1}{\varrho_n}\overline{\overline{f}}_{z_s}-\overline{\overline{f}}_z=0$$

gebracht.

Nachträglich können wir uns jetzt leicht von der Willkürlichkeit wieder frei machen, welche bei der Wahl der Kurvenschar C_α hereingekommen ist. Betrachten wir irgend eine Kurve C in der (x, y)-Ebene und konstruieren wir dazu eine benachbarte Kurve C', indem wir auf den Normalen von C das Inkrement δn, das eine Funktion der Bogenlänge s ist, abtragen, so können wir diese beiden Kurven immer als Angehörige einer Kurvenschar C_α, wie wir sie eben benützt haben, betrachten. Daraus folgt unmittelbar, daß bei dem Übergang von C zu C'

$$\delta z = z_n \delta n, \quad \text{sowie } \delta \bar{f}_{z_n} = \frac{\delta \bar{f}_{z_n}}{\delta n} \delta n \tag{18}$$

ist. Andrerseits muß der Krümmungsradius der orthogonalen Trajektorie der eingeführten Schar, welche C und C' enthält,

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{\delta \Theta}{\delta n} \tag{19}$$

sein, wobei $\delta\Theta$ der Winkel ist, den die Normalen in zwei zusammengehörigen Punkten von C und C' bilden. Dieser Winkel ist identisch mit dem Winkel, welchen die Tangenten zu C und C' in den betrachteten Punkten bilden, also

$$\delta\Theta = \frac{d\,\delta n}{ds} = \delta n', \tag{20}$$

sonach ergibt sich

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{\delta n'}{\delta n}. \tag{19*}$$

Schreiben wir noch für $\bar{f}$ bei Benützung natürlicher Koordinaten in der Weise von pg. 45 $\bar{f}(z_n, z_s, z, x, y, x_s)$ und bezeichnen die Krümmung der Kurve C mit $k = \frac{1}{\varrho_s}$, so geht (17) über in

$$\delta(\bar{f}_{z_n}) = -\frac{d}{ds}(\bar{f}_{z_s}\delta n) + (k\bar{f}_{z_n} + \bar{f}_z)\,\delta n. \tag{21}$$

Von hier aus gehen wir jetzt zu dem kanonischen System über, indem wir die Ableitung von $\bar{f}$ nach z_n

$$-\frac{\partial \bar{f}}{\partial z_n} = \varphi \tag{22}$$

als neue Unbekannte einführen. Wir berechnen aus dieser Gleichung z_n auf C als Funktion von φ, z, z_s und s und führen unter Einsetzen des berechneten Wertes von z_n in Übereinstimmung mit Gleichung (35) des § 1 die neue Funktion

(23) $$K(\varphi, z_s, z, x, y, x_s) = z_n \overline{f}_{z_n} - \overline{f}$$

ein. Für jeden Punkt der Kurve C gilt dann

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = -z_n, \quad \frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial K}{\partial z_s} = -\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_s},$$

also finden wir nach den Gleichungen (18) und (21)

(24)
$$\left| \begin{aligned} \delta z &= -\frac{\partial K}{\partial \varphi}\,\delta n \\ \delta \varphi &= -\frac{d}{ds}(K_{z_s} . \delta n) + (k . \varphi + K_z)\,\delta n, \end{aligned} \right.$$

womit wir ein zu der Euler-Lagrangeschen Gleichung (1) gehöriges Gleichungssystem erreicht haben, welches wir das zweite kanonische System nennen wollen. Es gehört formal als Euler-Lagrangesches System zur dem Variationsproblem

$$I = -\int \{ \int [z_n . \varphi + K(\varphi, z_s, z, x, y, x_s)]\, ds \}\, \delta n,$$

denn dieses lautet zunächst

$$z_n + \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial K}{\partial z_s}\,\delta n\, ds\right) + \frac{\delta}{\delta n}(\varphi\, ds\, \delta n) - \frac{\partial K}{\partial z}\,\delta n\, ds = 0$$

und geht, wenn wir in der zweiten Gleichung

$$\delta\, ds = -k . ds\, \delta n$$

berücksichtigen, in (24) über.

Das System (24) können wir auch als ein System von zwei totalen funktionalen Differentialgleichungen ansehen, da seine Gestalt und seine Integration wesentlich bestimmt ist einmal durch die Kurve C, von der wir gerade ausgehen, andrerseits durch die Angabe von δn, welches den Übergang zur Nachbarkurve vermittelt.

Wenn wir die Lösungen des Systems in einem vierdimensionalen (x, y, z, φ)-Raume interpretieren, so geht durch jede mittels

$$C, z(s), \varphi(s)$$

vorgegebene geschlossene Raumkurve (M_1) des R_4 eine bestimmte Fläche (M_2) hindurch, welche das System (24) befriedigt und sonach eine Extremale unseres Variationsproblems repräsentiert. Für die wirkliche Herstellung der Extremale aus dem System (24) müssen wir uns dieses freilich wieder in ein Differentialsystem zurückverwandeln, indem wir in der (x, y)-Ebene eine bestimmte Schar

von Kurven C_α vorgeben und so an die Stelle der durch δn bestimmten Variation eine Differentiation nach α setzen. In jedem Punkte einer Kurve C, $z(s)$, $\varphi(s)$, in dem wir unmittelbar $\frac{dz}{ds}$ und $\frac{d\varphi}{ds}$ kennen, liefert das System (24) $\frac{\delta\varphi}{\delta n}$ und $\frac{\delta z}{\delta n}$, somit ist längs der Kurve die abwickelbare Fläche der Tangentialebenen bekannt. Darnach ist klar, daß sich die Extremale sowohl durch eine direkte Verallgemeinerung des Cauchy-Lipschitzschen Verfahrens, wie durch Übertragung der Methode der sukzessiven Approximation von den gewöhnlichen Differentialgleichungen her auf das hier vorliegende allgemeinere Problem gewinnen läßt.

3) Übertragung des Begriffs der „relativen Integralinvariante".

Es wird zweckmäßig sein, schon in dem vorliegenden einfachen Problem zu zeigen, wie sich die Begriffe, deren Ausbildung sich in der Theorie der einfachen Integrale als zweckmäßig erwies, auf Probleme mit Doppelintegralen übertragen lassen. Ihre volle Bedeutung wird freilich erst bei Problemen mit mehreren abhängigen Funktionen in Erscheinung treten.

Um zunächst den Begriff der relativen Integralinvariante zu übertragen, knüpfen wir an die Grenzformel an, wie wir sie in Gleichung (24) des vorigen Paragraphen gefunden haben, und betrachten den Ausdruck

$$(25)\quad \int_{(\Gamma)} \Big\{ (f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y}) \Big(\delta x \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dx}{d\sigma} \Big) + f_{z_x} \Big(\delta z \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dz}{d\sigma} \Big) + f_{z_y} \Big(\delta x \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dx}{d\sigma} \Big) \Big\} d\sigma,$$

wo das Integral über eine geschlossene, ganz auf einer Extremale gelegene Kurve Γ erstreckt ist, und die Ableitungen z_x, z_y die Richtungskoeffizienten der durch Γ gehenden Extremale sind, während δx, δy, δz beliebige Inkremente bedeuten.

Jetzt denken wir die betrachtete Extremale als Angehörige einer einparametrigen Extremalenschar, welche im gewöhnlichen Sinne des Wortes ein Feld bildet, also in der hier gewählten Bezeichnungsweise, eines Parameterfeldes. Durch die geschlossene Kurve Γ wollen wir eine beliebige röhrenförmige Fläche legen, welche jede Extremale des Feldes in einer und nur einer geschlossenen Kurve schneidet. Nach der Eigenschaft des Feldes ist klar, daß wir auf der röhrenförmigen Fläche eine Kurvenschar

Γ_α erhalten, welche diese Fläche einfach und lückenlos erfüllt; wir können daher den Parameter α zusammen mit der Bogenlänge σ der Kurven Γ_α auf der Röhrenfläche als Koordinaten einführen. Integrieren wir dann den Ausdruck (25) nach α von α_1 bis α_2, so erhalten wir ein Doppelintegral erstreckt über einen von den Kurven Γ_{α_1} und Γ_{α_2} begrenzten Bereich der Röhrenfläche

$$(26)\qquad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\Gamma_\alpha} \Big\{ f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y} \Big) \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) + f_{z_x} \Big(\frac{\delta z}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma} \Big) + f_{z_y} \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma} - \frac{\delta z}{\delta \alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) \Big\} d\sigma.$$

Beziehen wir die Röhrenfläche auf die Koordinaten x und y, so geht dieses Doppelintegral über in

$$26^*)\qquad \int\int \Big\{ f + \Big(\frac{\delta z}{\delta x} - z_x \Big) f_{z_x} + \Big(\frac{\delta z}{\delta y} - z_y \Big) f_{z_y} \Big\} dx\, dy,$$

das Doppelintegral erstreckt über den zum Bereich auf der Röhrenfläche gehörigen Bereich der (x, y)-Ebene, wobei $\frac{\delta z}{\delta x}$, $\frac{\delta z}{\delta y}$ die Richtungskoeffizienten der Röhrenfläche sind.

Durch die beiden Kurven Γ_{α_1} und Γ_{α_2} legen wir im Felde eine zweite röhrenförmige Fläche, welche mit der ersten zusammen eine geschlossene Fläche nach Art eines Torus bildet. Die zweite Fläche wird von der Extremalenschar des Feldes in Kurven Γ'_α geschnitten, welche sie auch als eine einparametrige Schar einfach und lückenlos bedecken, dabei fallen Γ_{α_1} und Γ_{α_2} mit Γ'_{α_1} bezw. Γ'_{α_2} zusammen und die Kurven Γ_α und Γ'_α sind einander durch die durch beide hindurchgehende Feldextremale zugeordnet.

Das Extremalintegral I (vergl. § 1, Gl. 4), erstreckt über das von Γ_α und Γ'_α begrenzte Stück der Feldextremale, hat einen bestimmten Wert, der eine Funktion nur von α ist. Für seine Ableitung ergibt sich nach (25)

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_{\Gamma_\alpha} \Big\{ (f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y}) \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) + f_{z_x} \Big(\frac{\delta z}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma} \Big) + f_{z_y} \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma} - \frac{\delta z}{\delta \alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) \Big\} d\sigma$$

$$- \int_{\Gamma'_\alpha} \Big\{ (f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y}) \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) + f_{z_x} \Big(\frac{\delta z}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma} \Big) + f_{z_y} \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma} - \frac{dz}{d\alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) \Big\} d\sigma,$$

wobei die Integration für beide Kurven in demselben Sinne genommen ist. Integrieren wir diese Gleichung von α_1 bis α_2 nach α und berücksichtigen, daß sowohl I_{α_1} als auch I_{α_2} verschwindet, so erhalten wir

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\Gamma_\alpha} \left\{ (f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y}) \begin{pmatrix} \delta x & dy \\ \delta\alpha & d\sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta y & dx \\ \delta\alpha & d\sigma \end{pmatrix} + \cdots \right\} d\sigma = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{\Gamma'_\alpha} \{ (f - \cdots \} \, d\sigma.$$

Diese Tatsache drücken wir dadurch aus, daß wir das Integral

$$(f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y}) \left(\delta x \, \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \, \frac{dx}{d\sigma} \right) + f_{z_x} \left(\delta z \, \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \, \frac{dz}{d\sigma} \right) + f_{z_y} \left(\delta x \, \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \, \frac{dx}{d\sigma} \right) \Big\} d\sigma$$

das Element einer relativen Integralinvariante nennen, sie ist damit identisch, daß bei diesem einfachen Problem in jedem Parameterfelde von Extremalen das Hilbertsche Integral (26*) verschwindet, wenn es über eine geschlossene Fläche erstreckt wird, daß also in jedem Parameterfelde der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz gilt.

4) Die Jacobische Gleichung.

Im vorigen Abschnitt führte uns der Übergang von der relativen Integralinvariante zu einer absoluten zu gewissen Eigenschaften der den Euler-Lagrangeschen Gleichungen zugeordneten Jacobischen Gleichungen. Bei dem vorliegenden einfachen Problem ist es noch ohne Bedeutung, von einer absoluten Integralinvariante zu sprechen, gleichwohl wollen wir auch hier einen Blick auf die zu (1) gehörige Jacobische Gleichung werfen.

Diese entspringt ihrerseits als Euler-Lagrangesche Gleichung aus der zweiten Variation des Integrals (2)

$$I = \iint \Phi(\delta_x, \delta_y, z, x, y) \, dx \, dy, \tag{28}$$

wo

$$2\Phi = f_{z_x z_x} \delta_x^2 + 2 f_{z_x z_y} \delta_x \delta_y + f_{z_y z_y} \delta_y^2 + 2 f_{z_x z} \delta_x \delta + 2 f_{z_y z} \delta_y \delta + f_{zz} \delta^2 \tag{28*}$$

ist und in deren Koeffizienten für z und seine Ableitungen die Werte auf einer beliebigen Extremale eingesetzt zu denken sind; sie lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{\delta_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi_{\delta_y}) - \Phi_\delta = 0. \tag{29}$$

Wir können für ihre Integration einen ähnlichen Satz beweisen, wie den auf pg. 28 erwähnten Satz von Jacobi. Eine Extremale der Gleichung (1) wurde festgelegt, wenn auf irgend einer Kurve C_0 der (x, y)-Ebene die Werte von z, sowie von $\frac{dz}{dn}$ als Funktionen der Bogenlänge s_0

(30) $$z = z_0(s_0), \qquad z_n = z_{n_0}(s_0)$$

vorgegeben wurden. Der Funktionswert $z(x, y)$ der Extremalen, der zu einem beliebigen Punkte der (x, y)-Ebene gehört, erscheint so abhängig von den beiden Funktionen (30). Variieren wir diese, so erhalten wir die Variation von z in der Gestalt

(31) $$\delta z = \int_{C_0} \left\{ z_{z_0}(x, y; C_0, z_0, z_{n_0}, s_0)\, \delta z_0 + z_{z_{n_0}}(x, y; C_0, z_0, z_{n_0}, s_0)\, \delta z_{n_0} \right\} ds_0,$$

wobei z_{z_0} und $z_{z_{n_0}}$ die funktionalen Ableitungen von z nach den beiden Funktionen (30) im Punkte s_0 auf C_0 sind. Da nun die Extremale $z(x, y, z_0, z_{n_0})$ in die Gleichung (1) eingeführt, diese zu einer Identität macht, so zeigt die Variation dieser Identität, daß unter hinreichenden Voraussetzungen dieses δz die Jacobische Gleichung (29) befriedigt, wenn in deren Koeffizienten für z und seine Ableitungen eben die Ausgangsextremale $z(x, y; C_0, z_0, z_{n_0})$ eingesetzt wird. Da nun in (31) δz_0 und δz_{n_0} willkürliche Funktionen des Parameters s_0 sind, so sind wegen des linearen Charakters der Jacobischen Gleichung auch die funktionalen Ableitungen selbst Lösungen

(32) $$\mathfrak{z}^{(1)} = z_{z_0}(x, y; C_0, z_0, z_{n_0}), \qquad \mathfrak{z}^{(2)} = z_{z_{n_0}}(x, y; C_0, z_0, z_{n_0}),$$

und zwar Lösungen, die einen willkürlichen Parameter s_0 enthalten.

Als weiteren Punkt wollen wir hervorheben, daß die Jacobische Gleichung (29) sich selbst adjungiert ist. Denn setzen wir die linke Seite von (29) gleich $L(\mathfrak{z})$, so ist unmittelbar

$$\mathfrak{z}^{(1)} \cdot L(\mathfrak{z}^{(2)}) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{z}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{z}_x^{(2)}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{z}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(2)}}) - (\Phi_{\mathfrak{z}_x^{(2)}} \mathfrak{z}_x^{(1)} + \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(2)}} \mathfrak{z}_y^{(1)} + \Phi_{\mathfrak{z}^{(2)}} \mathfrak{z}^{(1)})$$

und daraus folgt, wenn $\mathfrak{z}^{(1)}$ und $\mathfrak{z}^{(2)}$ zwei Lösungen von $L(\mathfrak{z}) = 0$ sind

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{z}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{z}_x^{(2)}} - \mathfrak{z}^{(2)} \Phi_{\mathfrak{z}_x^{(1)}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{z}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(2)}} - \mathfrak{z}^{(2)} \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(1)}}) = 0.$$

Durch Integration dieses Ausdrucks über einen von den beiden Kurven C_1 und C_2 begrenzten, zweifach zusammenhängenden Bereich der (x, y)-Ebene erhalten wir

(33) $$\int_{C_1} \left\{ \mathfrak{z}^{(1)} \left(\Phi_{\mathfrak{z}_x^{(2)}} \frac{dy}{ds} - \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(2)}} \frac{dx}{ds} \right) - \mathfrak{z}^{(2)} \left(\Phi_{\mathfrak{z}_x^{(1)}} \frac{dy}{ds} - \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(1)}} \frac{dx}{ds} \right) \right\} ds$$
$$= \int_{C_2} \left\{ \mathfrak{z}^{(1)} \left(\Phi_{\mathfrak{z}_x^{(2)}} \frac{dy}{ds} - \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(2)}} \frac{dx}{ds} \right) - \mathfrak{z}^{(2)} \left(\Phi_{\mathfrak{z}_x^{(1)}} \frac{dy}{ds} - \Phi_{\mathfrak{z}_y^{(1)}} \frac{dx}{ds} \right) \right.$$

Führen wir auch hier, um auf das zweite kanonische System, welches zu der Gleichung (29) gehört, zu kommen, in der (x, y)-Ebene die Koordinaten α und β von pg. (57) ein, so erhält die Funktion Φ die Gestalt

$$2\bar{\bar{\Phi}} = \bar{\bar{f}}_{z_\alpha z_\alpha}\delta_\alpha^2 + 2\bar{\bar{f}}_{z_\alpha z_\beta}\delta_\alpha\delta_\beta + f_{z_\beta z_\gamma}\delta_\beta^2 + 2f_{z_\alpha z}\delta_\alpha\delta + 2\bar{f}_{z_\beta z}\delta_\beta\delta + \bar{\bar{f}}_{zz}\delta^2$$

und nach Einführung der natürlichen Koordinaten n und s erhalten wir für die zugehörige kanonische Funktion $X = \delta_n\bar{\Phi}_{\delta_n} - \Phi$, wenn wir

$$\mathfrak{f} = -\bar{\Phi}_{\delta_n}$$

setzen und für die Koeffizienten statt der Funktion $\bar{f}$ die Funktion K einführen

$$2X(\mathfrak{f}, \delta_s, \delta, x, y, x_s) = \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}\mathfrak{f}^2 + 2\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z_s}\mathfrak{f}\cdot\delta_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s^2}\delta_s^2 + 2\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z}\mathfrak{f}\cdot\delta + 2\frac{\partial^2 K}{\partial z_s\partial z}\delta_s\delta + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\delta^2. \tag{34}$$

Also ergibt sich als das der Jacobischen Gleichung (29) zugeordnete zweite kanonische System

$$\begin{cases} \delta\delta = -\left(\dfrac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}\mathfrak{f} + \dfrac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z_s}\delta_s + \dfrac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z}\delta\right)\delta n \\ \delta\mathfrak{f} = -\dfrac{d}{ds}\left[\left(\dfrac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z_s}\mathfrak{f} + \dfrac{\partial^2 K}{\partial z_s^2}\delta_s + \dfrac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial z}\delta\right)\delta n\right] + \left(k\cdot\mathfrak{f} + \dfrac{\partial_{\mathfrak{f}}^2 K}{\partial\varphi\,\partial z}\mathfrak{f} + \dfrac{\partial^2 K}{\partial z_s\partial z}\delta_s + \dfrac{\partial^2 K}{\partial z^2}\delta\right)\delta n, \end{cases}$$

das also seinerseits das dem System (24) zugehörige Jacobische System vorstellt, wie es ja auch unmittelbar aus (24) durch Variation hergeleitet werden kann.

Dieses System ist natürlich, wie die Gleichung (29), sich selbst adjungiert, denn wir haben für zwei Lösungssysteme $\delta^{(1)}$, $\mathfrak{f}^{(1)}$ bezw. $\delta^{(2)}$, $\mathfrak{f}^{(2)}$ von (35)

$$\begin{aligned} \delta[(\delta^{(1)}\mathfrak{f}^{(2)} - \delta^{(2)}\mathfrak{f}^{(1)})\,ds] &= [\delta^{(1)}(\delta\mathfrak{f}^{(2)} - k\mathfrak{f}^{(2)}\delta n) + \mathfrak{f}^{(2)}\delta\delta^{(1)} - \delta^{(2)}(\delta\mathfrak{f}^{(1)} - k\mathfrak{f}^{(1)}\delta n) - \mathfrak{f}^{(1)}\delta\delta^{(2)}]\,ds \\ &= -\frac{d}{ds}\left\{\delta n\left[\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z_s}(\mathfrak{f}^{(2)}\delta^{(1)} - \mathfrak{f}^{(1)}\delta^{(2)}) + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s^2}(\delta_s^{(2)}\delta^{(1)} - \delta_s^{(1)}\delta^{(2)})\right]\right\}\cdot ds \end{aligned}$$

eine Relation, aus der unmittelbar folgt, daß das über eine geschlossene Kurve C genommene Integral

$$\int_C (\delta^{(1)}\mathfrak{f}^{(2)} - \delta^{(2)}\mathfrak{f}^{(1)})\,ds = \text{Const.} \tag{36}$$

ist. Dieses Resultat stimmt genau mit (33) überein.

5) Der Begriff der „Berührungstransformation" einer Linienfunktion.

Legen wir durch eine geschlossene Raumkurve $\Gamma_1 = (C_1, z_1(s_1))$ irgend eine Fläche und führen auf ihr eine einparametrige Kurvenschar ein, welche sie einfach und lückenlos erfüllt und Γ_1 enthält, so können wir Γ_1 eine bestimmte Kurve Γ_2 aus der Schar zuordnen.

Da die Fläche durch Γ_1 willkürlich gelegt werden kann und auf dieser die Kurvenschar ebenfalls noch willkürlich gewählt werden kann, können wir offenbar Γ_1 eine beliebige Kurve Γ_2 zuordnen.

Diese Zuordnung wollen wir dahin spezialisieren, daß wir von der Fläche, welche die Vermittlung von Γ_1 zu Γ_2 übernimmt, verlangen, sie sei Extremale eines vorgegebenen Variationsproblems, etwa des zum Integrale (2) gehörigen Variationsproblems selbst. Eine solche Transformation der Kurve $\Gamma_1 = (C_1, z_1(s_1))$ in die Kurve $\Gamma_2 = (C_2, z_2(s_2))$ wollen wir eine „Berührungstransformation" nennen, und zwar aus folgendem Grunde: Das Extremalintegral I, genommen über das von den beiden Kurven Γ_1 und Γ_2 begrenzte Flächenstück der betrachteten Extremale, ist eine Funktion der beiden Kurven Γ_1 und Γ_2, welche zusammen die Begrenzungslinie des Extremalflächenstücks bilden: $I[\Gamma_1, \Gamma_2|]$. Halten wir für die folgende Betrachtung die beiden Kurven C_1 und C_2 in der (x, y)-Ebene fest, so erscheint I noch als Funktional der beiden Funktionen $z_1(s_1)$ und $z_2(s_2)$:

$$I = I[z_1(s_1),\ z_2(s_2)|] \tag{37}$$

und wenn wir auch hier $(-\bar{f}_{z_n}) = \varphi$ setzen, liefert die Grenzformel der Variationsrechnung nach Gleichung (31) des vorigen Paragraphen

$$\delta I = \int_{C_2} \varphi_2\, \delta z_2\, ds_2 - \int_{C_1} \varphi_1\, \delta z_1\, ds_1. \tag{38}$$

Diese Gleichung ist offenbar das Analogon der Gleichung (23) von pg. 29 und gibt den Grund an, weshalb wir in Analogie der dortigen Bezeichnungsweise die Transformation eine Berührungstransformation nennen; die Linienfunktion I charakterisiert die Berührungstransformation. Die zugehörige Extremale ist nach (37) dabei durch die beiden Begrenzungskurven Γ_1 und Γ_2 bestimmt gedacht; statt dessen können wir sie auch dadurch festlegen, daß wir längs der Kurve C_1 außer $z_1(s_1)$ auch noch $\varphi_1(s_1)$ vorgeben, dadurch erhalten wir I als Funktional dieser beiden letzteren Funktionen

$$I = I[z_1(s_1),\ z_2(s_2)|] = \bar{I}[z_1(s_1),\ \varphi_1(s_1)|]. \tag{39}$$

Von einer „infinitesimalen" Berührungstransformation werden wir dann sprechen, wenn die Kurven Γ_1 und Γ_2, und somit auch C_1 und C_2 unendlich dicht zusammenrücken. Den Übergang von der Kurve C_1 zu C_2 wollen wir in der bisher angewandten Bezeichnungsweise mit δn bezeichnen, dann mag in der Formel (38) zur Unterscheidung das δ durch den Buchstaben d' ersetzt werden:

$$(38^*) \qquad d'I = \int_{C_2} \varphi_2 d'z_2 ds_2 - \int_{C_1} \varphi_1 d'z_1 ds_1.$$

Lassen wir hier C_1 und C_2 dicht zusammenrücken, so erhalten wir hieraus

$$(40) \qquad d'I = -\int_C \delta(\varphi d'z\, ds) = -\int_C [\delta\varphi d'z + \varphi d'(\delta z) - k\varphi d'z\, \delta n]\, ds,$$

wobei k die Krümmung der Kurve C ist. Nun ist für diesen Fall

$$I = \int_C \bar{f}(z_n, z_s, z, x, y, x_s)\, \delta n\, ds$$

und somit

$$(41) \qquad d'I = \int_C (d'\bar{f})\, \delta n\, ds;$$

die Gleichsetzung von (40) und (41) liefert dann

$$-\int_C \left\{\delta\varphi d'z - \delta z d'\varphi - k\varphi d'z\, \delta n\right\} ds = \int_C \left\{d'\bar{f} \cdot \delta n + d'(\varphi \delta z)\right\} ds$$

$$= \int_C d'\left(\bar{f} + \varphi \frac{\delta z}{\delta n}\right) \delta n\, ds = -\int_C d'K\, \delta n\, ds$$

mit Berücksichtigung von Gleichung (23); also ist

$$\int_C \{\delta\varphi - k\varphi\, \delta n)\, d'z - \delta z d'\varphi\}\, ds = \int_C \left\{\frac{\partial K}{\partial \varphi} d'\varphi + \frac{\partial K}{\partial z_s} d'z_s + \frac{\partial K}{\partial z} d'z\right\} \delta n ds$$

oder nach partieller Integration des zweiten Terms rechts

$$(42) \qquad \begin{aligned} &\int_C \{(\delta\varphi - k\varphi\, \delta n)\, d'z - \delta z d'\varphi\}\, ds \\ &= \int_C \left\{\frac{\partial K}{\partial \varphi} \delta n d'\varphi - \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial K}{\partial z_s}\delta n\right) - \frac{\partial K}{\partial z}\delta n\right] d'z\right\} ds. \end{aligned}$$

Hieraus schließen wir durch Koeffizientenvergleichung unter Berücksichtigung der Willkürlichkeit von $d'z$ und $d'\varphi$

$$(43) \qquad \begin{cases} \delta z = -\dfrac{\partial K}{\partial \varphi}\delta n \\ \delta\varphi = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial K}{\partial z_s}\delta n\right) + \left(k\varphi + \dfrac{\partial K}{\partial z}\right)\delta n. \end{cases}$$

Sonach erhalten wir als Definitionsgleichungen einer infinitesimalen Berührungstransformation das zweite kanonische System, d. h. die Differentialgleichung der Extremalen des Variationsproblems.

Während die endliche Berührungstransformation durch die Linienfunktion I charakterisiert wurde, erscheint für die infinitesimale Transformation die gewöhnliche Funktion f bezw. die durch sie bestimmte Funktion K charakteristisch. Diese beiden Ausdrücke I und f erscheinen ihrem Wesen nach nicht so koordiniert wie die entsprechenden Funktionen I und H bezw. f bei gewöhnlichen Berührungstransformationen.

6) Die Transformation der Extremalengesamtheit in sich.

Diese Verschiedenheit wird sich bemerkbar machen, wenn wir nach dem Analogon der Transformation des kanonischen Systems in sich fragen. Durch eine Kurve im R_4 $[C, z(s), \varphi(s)]$ ist eine Extremale eindeutig festgelegt, sie wird auf einer Hyperfläche $C = C_0$ zwei Funktionen $z_0(s_0)$ und $\varphi_0(s_0)$ als „Anfangswerte" bestimmen. Auf C_0 wollen wir eine Vertauschung der Anfangsfunktionen so vornehmen, daß einem beliebigen Funktionenpaar $z_0(s_0)$, $\varphi_0(s_0)$ durch eine Transformationsgruppe mit dem einen Parameter α andere Funktionenpaare zugeordnet sind. Diese Transformationsgruppe wird mit den Anfangsfunktionen auch die durch sie bestimmten Extremalen unter einander vertauschen. Auf einer beliebigen Kurve C werden somit die Funktionen $z(s)$ und $\varphi(s)$, welche zu irgend einer Extremale gehören, durch die Transformation in andere Funktionen übergeführt, welche zu der transformierten Extremale gehören. Dabei wird jedem Punkte mit der Bogenlänge s auf C eine bestimmte Variation der Funktionen $z(s)$, $\varphi(s)$, nämlich $\delta z(s)$, $\delta\varphi(s)$ zugehören, diese Variationen sind natürlich von allen Werten der Funktionen $z(s)$ und $\varphi(s)$ auf C abhängig und werden etwa die Gestalt

$$(44) \qquad \begin{cases} \delta z = \mathfrak{a}[C, z(s), \varphi(s)\,|\,; s]\delta\alpha \\ \delta\varphi = \mathfrak{m}[C, z(s), \varphi(s)\,|\,; s]\delta\alpha \end{cases}$$

besitzen, die also den analytischen Ausdruck für die Transformation darstellen.

Hieraus folgt zunächst für die Funktionale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ die Bedingung, daß sie Lösungen

$$(45) \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{a}[C, z(s), \varphi(s)|; s], \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{m}[C, z(s, \varphi(s)|; s]$$

der Jacobischen Gleichungen (35) sein müssen. Um sie weiter festzulegen, müssen wir beachten, daß bei der Transformation der Ausdruck

$$\int_C \varphi d'z\, ds$$

das Element einer relativen Integralinvariante bleiben muß, es muß also

$$\delta \int_C \varphi\, d'z\, ds = d' W \delta\alpha \tag{46}$$

sein, wo unter W eine Linienfunktion $W[C, z(s), \varphi(s)|]$ zu verstehen ist. Demnach haben wir

$$\int_C \{\mathfrak{m}\, d'z + \varphi\, d'\mathfrak{a}\}\, ds = d' W$$

oder

$$\int_C \{\mathfrak{m}\, d'z - \mathfrak{a}\, d'\varphi\}\, ds = d' \{W - \int_C \varphi \,.\, \mathfrak{a}\, ds\}. \tag{47}$$

Setzen wir daher

$$W - \int_C \varphi \,.\, \mathfrak{a} ds = Q[C, z(s), \varphi(s)|] \tag{48}$$

und sind Q_z und Q_φ die partiellen funktionalen Ableitungen von Q im Punkte s:

$$Q_z = Q_z[C, z(s), \varphi(s)|;\ s] \quad Q_\varphi = Q_\varphi[C, z(s), \varphi(s)|;\ s], \tag{49}$$

so folgt aus

$$\int_C \{\mathfrak{m}\, d'z - \mathfrak{a}\, d'\varphi\}\, ds = \int_C \{Q_z d'z + Q_\varphi d'\varphi\}\, ds$$

das Resultat

$$\mathfrak{m} = Q_z, \qquad \mathfrak{a} = -Q_\varphi. \tag{50}$$

Haben wir nun irgend eine Extremale $z(C, s)$, $\varphi(C, s)$ [1]), so können wir sie immer als zu einer Schar von Extremalen gehörig auffassen. Ist a der Parameter einer solchen Schar, so ist

$$\mathfrak{z} = \frac{\partial z}{\partial a}, \qquad \mathfrak{f} = \frac{\partial \varphi}{\partial a}$$

eine Lösung der Jacobischen Gleichungen und daher besteht nach (36) die Relation

$$\int_C \left\{Q_z \frac{\partial z}{\partial a} + Q_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial a}\right\} ds = \text{Const.}$$

d. h.

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \text{Const.}$$

Darnach muß auch für jede Extremale $z(C, s)$, $\varphi(C, s)$ die Bedingung

1) Die Kurve C und die Bogenlänge s bestimmen zusammen den gerade betrachteten Punkt der (x, y)-Ebene, sie vertreten also hier nur die Variabeln x und y.

(51) $$Q\,[C,\, z(s),\, \varphi(s)|] = \text{Const.}$$

erfüllt sein, eine Tatsache, die wir dadurch ausdrücken, daß wir die Linienfunktion Q ein Integral des kanonischen Systems (24) nennen.

Um diese Überlegungen umzukehren, zeigen wir folgendes: Gibt es zwei Ausdrücke $A(C, s)$, $B(C, s)$ der Art, daß für die Lösungen $\mathfrak{z}(C, s)$, $\mathfrak{f}(C, s)$ der Jacobischen Gleichungen (35) die Relation

(52) $$\int_C \{A\,.\,\mathfrak{z} + B\,.\,\mathfrak{f}\}\,ds = \text{Const.}$$

gilt, so ist

(53) $$\mathfrak{z} = B(C, s) \qquad \mathfrak{f} = -A(C, s)$$

eine Lösung der Jacobischen Gleichungen. Denn es gilt

$$0 = \delta \int_C (A\mathfrak{z} + B\mathfrak{f})\,ds$$

$$= \int_C [\delta A\,.\,\mathfrak{z} + A\,\delta\mathfrak{z} + \delta B\,.\,\mathfrak{f} + B\delta\mathfrak{f} - (A\mathfrak{z} + B\mathfrak{f})\,k\delta n]\,ds$$

$$= \int_C \Big\{(\delta A - kA\delta n)\,\mathfrak{z} + (\delta B - kB\delta n)\,\mathfrak{f} - A\Big(\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}\mathfrak{f} + \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z_s}\mathfrak{z}_s + \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z}\mathfrak{z}\Big)\delta n$$

$$+ B\Big[-\frac{d}{ds}\Big(\Big(\frac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial\varphi}\mathfrak{f} + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s^2}\mathfrak{z}_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial z}\mathfrak{z}\Big)\delta n\Big) + \Big(k\mathfrak{f} + \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z}\mathfrak{f} + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial z}\mathfrak{z}_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\mathfrak{z}\Big)\delta n\Big]$$

oder nach partieller Integration einiger Terme

(54) $$\int_C \Big\{\mathfrak{z}\Big[\delta A - \frac{d}{ds}\Big(\Big(-\frac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial\varphi}A + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s^2}B_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial z}B\Big)\delta n\Big) + \Big(-kA - \frac{\partial^2 K}{\partial z\,\partial\varphi}A + \frac{\partial^2 K}{\partial z\,\partial z_s}B_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}B$$

$$+ \mathfrak{f}\Big[\delta B - \Big(\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}A - \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z_s}B_s - \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z}B\Big)\delta n\Big]\Big\}\,ds = 0.$$

Aus dieser Formel schliessen wir infolge der Willkürlichkeit des δn auf C, daß der Integrand von (54) verschwinden muß und daraus folgt weiter, daß die Gleichungen

(55) $$\delta B = -\Big(-\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}A + \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z_s}B_s + \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi\,\partial z}B\Big)\delta n$$

$$-\delta A = -\frac{d}{ds}\Big(\Big(-\frac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial\varphi}A + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s^2}B_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s\,\partial z}B\Big)\delta n\Big) + \Big(-kA - \frac{\partial^2 K}{\partial z\,\partial\varphi}A + \frac{\partial^2 K}{\partial z\,\partial z_s}B_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2}$$

bestehen müssen, womit die Gleichungen (35) erreicht und also die obige Behauptung bewiesen ist.

Haben wir nun in dem oben festgelegten Sinne ein Integral der kanonischen Gleichungen (24)

$$Q[C,\ z(s),\ \varphi(s)|] = \text{Const.},$$

so gilt offenbar für die Jacobischen Gleichungen (35) die Relation

$$\int_C \{Q_z[C,\ z(s),\ \varphi(s)|;\ s]\mathfrak{z}(s) + Q_\varphi[C,\ z(s),\ \varphi(s)|;\ s]\mathfrak{f}(s)\}\,ds = \text{Const.},$$

und sonach ist, wie eben bewiesen

$$\mathfrak{z} = Q_\varphi, \qquad \mathfrak{f} = -Q_z \tag{56}$$

eine Lösung der Jacobischen Gleichungen.

Damit haben wir schließlich noch unmittelbar das Analogon des Poissonschen Theorems, denn aus zwei Integralen der kanonischen Gleichungen

$$Q^{(1)}[C,\ z(s),\ \varphi(s)|] = \text{Const.} \quad \text{und} \quad Q^{(2)}[C,\ z(s)\,\varphi(s)|] = \text{Const.}$$

gewinnen wir zwei Systeme von Lösungen der Jacobischen Gleichungen

$$\mathfrak{z}^{(1)} = Q^{(1)}_\varphi, \qquad \mathfrak{f}^{(1)} = -Q^{(1)}_z$$
$$\mathfrak{z}^{(2)} = Q^{(2)}_\varphi, \qquad \mathfrak{f}^{(2)} = -Q^{(2)}_z$$

und daraus nach (36)

$$\int_C \{Q^{(2)}_z Q^{(1)}_\varphi - Q^{(2)}_\varphi Q^{(1)}_z\}\,ds = \text{Const.} \tag{57}$$

als neues Integral.

§ 3.

Integration von partiellen funktionalen Differentialgleichungen durch ein Extremalintegral.

Der im ersten Paragraphen dargelegte Gedankengang kann auch bei dem in diesem Kapitel behandelten Problem umgekehrt und die Integration gewisser partiellen funktionalen Differentialgleichungen dadurch geleistet werden, daß man sie auf die Lösung eines Variationsproblems im Gebiete der Doppelintegrale, d. h. direkte Erledigung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen (vgl. § 2), zurückführt.

Freilich wird dieser Gedanke hier außerordentlich viel weniger leisten, insofern die partielle funktionale Differentialgleichung,

welche im § 1 auftrat, durchaus nicht die allgemeinste ihrer Art ist, während im § 3 des ersten Abschnitts gerade der Umstand den Überlegungen ihre Bedeutung verlieh, daß die allgemeinste partielle Differentialgleichung erster Ordnung als Hamilton-Jacobische Gleichung eines Variationsproblems angesehen werden konnte. Gleichwohl erscheint auch hier diese Umkehrung für die spezielle Klasse der partiellen funktionalen Differentialgleichungen vom systematischen Standpunkte aus nicht ohne Bedeutung.

Die Aufgabe, welche zu lösen ist, lautet hier: Von einer Linienfunktion $V[L]$, die für alle geschlossenen Kurven eines betrachteten Gebietes des Raumes definiert ist, weiß man, daß zwischen ihren Volterraschen Ableitungen nach den Koordinatenebenen für jeden Punkt der einzelnen Kurve eine Relation besteht:

$$V_{xy} = H(x, y, z, V_{yz}, V_{zx}), \tag{1}$$

während die Unbestimmtheit in den Volterraschen Ableitungen durch die Bedingung

$$\frac{dz}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \pi}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial H}{\partial \varkappa}\cdot\frac{dy}{d\sigma} \quad (\pi = V_{yz},\ \varkappa = V_{zx}) \tag{1*}$$

festgelegt wird. Es soll diese Linienfunktion bestimmt werden.

Zur Lösung der Aufgabe werden wir uns aus der Funktion H den Integranden eines Variationsproblems herstellen, indem wir

$$z_x = \frac{\partial H}{\partial \pi}, \qquad z_y = \frac{\partial H}{\partial \varkappa}$$

setzen, was wegen (1*) möglich ist, und unter Elimination von π und $\varkappa$ die Funktion

$$f(z_x, z_y, z, x, y) = \pi\frac{\partial H}{\partial \pi} + \varkappa\frac{\partial H}{\partial \varkappa} - H$$

bilden. Zu dieser Funktion f gehört in derselben Weise, wie in § 1, eine Funktion $\overline{f}(z_s, z_n, z, x, y, x_s)$ und daraus läßt sich dann eine Funktion $K(\varphi, z_s, z, x, y, x_s)$ als dem H zugeordnet bilden, so daß neben (1) die Gleichung

$$V_n^* = K(V_x^*, z_s, z, x, y, x_s) \tag{2}$$

ohne Nebenbedingung tritt [1]).

---

1) Indessen ist K nicht die allgemeinste Funktion ihrer Art. Es gehört zwar zu jedem K ein $\overline{f}$, aber letzteres muß der Bedingung genügen, daß bei der Substitution von z_x und z_y an Stelle von z_s und z_n die Ableitung x_s herausfällt, dazu muß $z_s f_{z_s} + z_n f_{z_n}$ von x_s unabhängig sein.

Wir erhalten ein vollständiges Integral von (1) oder (2), wenn wir das Extremalintegral von einer festen Kurve L_0 aus nach allen Kurven L des betrachteten Bereiches des Raumes hin erstrecken

$$V[L, L_0|] = \int_{L_0}^{L} E \int f(z_x, z_y, z, x, y)\, dx\, dy, \tag{3}$$

und dabei nachträglich die Kurve L_0 wieder als beliebig ansehen. In der Tat läßt sich unter allen diesen Linienfunktionen leicht eine solche angeben, welche ein gegebenes Element $L = (C, z(s))$, V, V_z^* und V_n^*, das natürlich der Gleichung (2) genügen muß, enthält. Wir branchen nur auf L die Funktion $z_n(s)$ aus der Relation

$$\frac{\partial f}{\partial z_n} = - V_z^* \tag{4}$$

zu bestimmen und durch L diejenige Extremale zu legen, welche die normale Ableitung z_n besitzt; auf dieser Extremale müssen wir dann noch die Kurve L_0 so wählen, daß der Wert des Extremalintegrals (3) gerade den verlangten Wert V erhält. Die Ableitung V_n^* erhält von selbst den richtigen Wert, da das Element die Differentialgleichung (2) erfüllt. Die Linienfunktion (3) stellt somit in der Tat ein vollständiges Integral dar, sie hängt scheinbar von der willkürlichen Raumkurve L_0 ab, also von z w e i Funktionen einer Variabeln, aber, wie wir soeben sahen, ist für ein bestimmtes Integral die Raumkurve L_0 noch in gewisser Weise willkürlich zu wählen, so daß das vollständige Integral von (2) nur von e i n e r willkürlichen Funktion einer Variabeln abhängt.

Um ein beliebig vorgegebenes Integral $V[L|]$ mit Hülfe eines Funktionsfeldes von Extremalen darzustellen, denken wir uns die Gesamtheit der Kurven $L_0 = (C_0, z_0(s_0))$ bestimmt, für die

$$V[L|] = 0$$

wird. Setzen wir die Bestimmung einer implizit gegebenen Linienfunktion als möglich voraus[1]), so wird zu jeder Kurve C_0 sich eine bestimmte Funktion $z_0(s_0)$ ergeben. Durch alle Kurven L_0 legen wir dann die Extremalen, deren normale Ableitungen sich aus der Relation (4) bestimmen; das so konstruierte Funktionsfeld liefert durch das Extremalintegral eine Kurvenbelegung des Raumes, die mit dem gegebenen Integral $V[L|]$ zusammenfällt, denn die funktionalen Ableitungen genügen, da

1) Vgl. V. Volterra: Leçons sur les fonctions de lignes. Paris (1913), chap. 4.

$$\int_{C_0} \{(z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f}) \delta n_0 - \bar{f}_{z_n} \delta z_0\} ds_0 = (\delta V)_{L_0} = 0$$

ist, der gegebenen Gleichung (2) und das Integral reduziert sich für die Kurvengesamtheit L_0 auf das gegebene Integral $V[L|]$[1]).

Würde das gegebene Integral $V[L|]$ außer von L noch von einer willkürlichen Funktion einer Veränderlichen $\alpha\overset{1}{(}\overset{1}{t}\overset{1}{)}$ abhängen

$$V = V[L, \alpha\overset{1}{(}\overset{1}{t}\overset{1}{)}|], \tag{5}$$

also ein vollständiges Integral sein, so würde auch die Gesamtheit der Kurven L_0 von dieser Funktion abhängen. Wir erhielten also eine von einer willkürlichen Funktion $\alpha\overset{1}{(}\overset{1}{t}\overset{1}{)}$ abhängige Menge von Funktionsfeldern, welche das allgemeinste vollständige Integral von (2) darstellen würde.

Die Auflösung der partiellen funktionalen Differentialgleichung (2) ist somit auf die Integration der Euler-Lagrangeschen Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_{z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{z_y}) - f_z = 0 \tag{6}$$

zurückgeführt. Die durch sie bestimmten Extremalen werden wir als Charakteristiken der Gleichung (2) bezeichnen, sie sind identisch mit den von P. Lévy eingeführten „charactéristiques de première espèce“, wie sich auch formal ergibt, wenn wir die Gleichung (6) durch das zugehörige zweite kanonische System

$$\left\{\begin{aligned} \delta z &= -\frac{\partial K}{\partial \varphi}\delta n \\ \delta \varphi &= -\frac{d}{ds}(K_{z_s} . \delta n) + (k\varphi + K_z)\delta n \end{aligned}\right. \tag{7}$$

ersetzen [2]).

Als wesentliche Eigenschaft der Charakteristiken haben wir die Tatsache, daß sie durch ein Element eines Integrals von (2) je eindeutig festgelegt sind, denn wir kennen aus diesem Element von der Extremale außer der Kurve L, durch die sie hindurchgeht, auch die normale Ableitung auf dieser Kurve. Es haben demnach zwei Integrale von (2), die ein Element gemein haben, die ganze durch dieses bestimmte Charakteristik gemein.

---

1) Wegen der eindeutigen Bestimmtheit des Integrals vgl. P. Lévy, loc. cit. (pg. 6), pg. 149 ffg.

2) P. Lévy: loc. cit. pg. 152.

Schließlich wollen wir noch eine Aufgabe behandeln, welche die unmittelbare Verallgemeinerung des „Cauchyschen Problems“ der gewöhnlichen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist. In der (x, y)-Ebene sei eine geschlossene Kurve C_0 gegeben und dazu der Zylinder, welcher C_0 als Basis hat und dessen Erzeugende der z-Achse parallel sind, weiter möge eine bestimmte Linienfunktion $\Phi(z_0(s_0))$ gegeben sein, welche für alle geschlossenen Kurven $z_0(s_0)$ auf dem Zylinder, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, einen bestimmten Wert besitzt. Es soll dasjenige Integral der Gleichung (2) bestimmt werden, welches für die Kurven L auf der Zylinderfläche gerade den Wert Φ annimmt.

Zur Lösung dieser Aufgabe bilden wir für jede Funktion $z_0(s_0)$ die funktionale Ableitung Φ_z, die dann eine bestimmte Funktion der Bogenlänge s_0 ist und bestimmen aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z_n}\right)_0 = -\Phi_z \tag{4*}$$

die Funktion $z_n(s_0)$. Legen wir dann durch jede Kurve $z_0(s_0)$ diejenige Extremale oder, wie wir auch sagen können, Charakteristik, deren normale Ableitung gleich $z_n(s_0)$ ist, so haben wir in dem Ausdruck

$$V[L|] = \Phi[L_0|] + \int_{L_0}^{L} E f(z_x, z_y, z, x, y)\, dx\, dy \tag{8}$$

das verlangte Integral. Denn dieser Ausdruck reduziert sich für $L = L_0$ auf $\Phi[L_0|]$, weiter aber haben wir für seine Variation

$$\delta V = \int_{C_0} \Phi_{z_0}\, \delta z_0\, ds_0 + \int_C \{z_n f_{z_n} - \bar{f})\, \delta n - \bar{f}_{z_n}\, \delta z\}\, ds + \int_{C_0} (f_{z_n})_0\, \delta z_0\, ds_0.$$

Sonach ist mit Rücksicht auf (4*)

$$V_n = z_n \bar{f}_{z_n} - \bar{f} \quad V_z = -\bar{f}_{z_n}.$$

Diese Ausdrücke befriedigen aber die Gleichung (2), da diese, wie im ersten Paragraphen dargelegt, gerade aus ihnen durch Elimination von z_n hervorgeht.

Zweites Kapitel.

Das Variationsproblem mit zwei unbekannten Funktionen.

§ 1.

Das Variationsproblem und die partielle funktionale Differentialgleichung.

Das Problem des vorigen Kapitels soll jetzt dahin verallgemeinert werden, daß wir nicht eine, sondern zwei unbekannte Funktionen in das Variationsproblem, von dem wir ausgehen, aufnehmen. Die Behandlung der damit gestellten Aufgabe geht im allgemeinen den Ausführungen des vorigen Abschnitts parallel und kann daher hier knapper gehalten werden. An einigen Stellen tritt dagegen der allgemeinere Charakter der vorliegenden Aufgabe merklich hervor.

1) Das Variationsproblem und die Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

Das zu Grunde liegende Variationsproblem lautet jetzt, zwei unbekannte Funktionen $z(x, y)$ und $t(x, y)$ so zu bestimmen, daß das Integral

$$I = \iint_S f(z_x, z_y, z, t_x, t_y, t, x, y)\, dx\, dy \tag{1}$$

ein Extremum wird. Dabei seien auf der Randkurve C des Integrationsbereiches S der (x, y)-Ebene die Werte der beiden Funktionen z und t zunächst fest vorgegeben:

$$\left.\begin{aligned} z &= z(s) \\ t &= t(s) \end{aligned}\right\} \text{ auf } C. \tag{2}$$

Die erste Bedingung für das Eintreten eines Extremums ist die, daß die Funktionen $z(x, y)$ und $t(x, y)$ den beiden Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(f_{z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{z_y}) - f_z = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial x}(f_{t_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{t_y}) - f_t = 0 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

genügen müssen.

Die vier Veränderlichen, mit denen wir hier zu tun haben, wollen wir als Koordinaten der Punkte eines vierdimensionalen

(linearen) Raumes (R_4) interpretieren und wollen die eindimensionalen Mannigfaltigkeiten dieses Raumes „Kurven“, die zweidimensionalen „Flächen“ und die dreidimensionalen „Hyperflächen“ nennen.

Durch die Gleichungen (2) ist im R_4 eine Raumkurve gegeben, durch welche die gesuchte Fläche $z = z(x, y)$, $t = t(x, y)$, die als Lösung der Differentialgleichungen (3) wieder Extremale heißt, hindurchgehen muß. Auch hier setzen wir voraus, daß es im allgemeinen eine und nur eine Extremale gibt, die durch eine gegebene Raumkurve $(C, z(s), t(s)) = L$ hindurchgeht und im Inneren des von C begrenzten Bereiches der (x, y)-Ebene singularitätenfrei ist.

2) Das Extremalintegral als Linienfunktion und seine funktionalen Ableitungen.

Denken wir jetzt umgekehrt in einem bestimmten Bereich des R_4 eine geschlossene Raumkurve L vorgegeben, so ist durch sie eine Extremale eindeutig bestimmt. Das Extremalintegral

$$I[L] = \int E \int f(z_x, z_y, z, t_x, t_y, t, x, y)\, dx\, dy \tag{4}$$

ist sonach eine Linienfunktion des R_4. Die funktionalen Ableitungen werden wir wieder aus der Grenzformel der Variationsrechnung entnehmen können, zu deren Ableitung wir sogleich übergehen.

Wir variieren die Raumkurve L, welche den Wert des Extremalintegrals bestimmt; dadurch erhalten wir eine benachbarte Raumkurve L', durch welche wir ebenfalls eine Extremale legen. In derselben Weise, wie im vorigen Abschnitt, beziehen wir diese beiden Extremalflächenstücke ein-eindeutig auf einander, so daß Punkten des Randes wieder Randpunkte entsprechen. Die Verbindungslinie entsprechender Punkte beider Extremalflächenstücke stellt im R_4 einen „Vierervektor“ erster Art[1]) vor, dessen Komponenten wir mit δx, δy, δz, δt bezeichnen. Führen wir wieder x, y als Funktionen zweier Parameter u und v ein, wodurch auch z und t und ebenso die Koordinaten der Punkte der Nachbarextremale $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $t + \delta t$ Funktionen dieser Parameter werden, so sind beide Extremalflächenstücke auf denselben Bereich

---

1) Die Vektorenrechnung im vierdimensionalen Raum ist ausführlich entwickelt von A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie, I. Vierdimensionale Vektoralgebra, Annalen der Physik (4) 32 (1910), p. 749; II. Vierdimensionale Vektoralanalysis, ibid. 33 (1910), p. 649.

der (u, v)-Ebene abgebildet, bei der Variation des Extremalintegrals ist somit die Variation des Bereiches der unabhängigen Veränderlichen vermieden.

Bezeichnen wir wieder die zweigliedrigen Funktionaldeterminanten der Variabeln x, y, z, t nach u und v mit $\lambda_{(xy)}, \lambda_{(zx)}, \lambda_{(yz)}, \lambda_{(tx)}, \lambda_{(yt)}$, so werden

$$z_x = \frac{\lambda_{(zy)}}{\lambda_{(xy)}}, \quad z_y = \frac{\lambda_{(xz)}}{\lambda_{(xy)}}, \quad t_x = \frac{\lambda_{(ty)}}{\lambda_{(xy)}}, \quad t_y = \frac{\lambda_{(xt)}}{\lambda_{(xy)}}$$

und weiter haben wir [1])

$$f(z_x, z_y, z, t_x, t_y, t, x, y) = \frac{1}{\lambda_{(xy)}} F(\lambda_{(zy)}, \lambda_{(xz)}, \lambda_{(ty)}, \lambda_{(xt)}, \lambda_{(xy)}, z, t, x, y)$$

wo wieder F homogen vom ersten Grade in den kleinen Determinanten λ ist. Folglich erhält das Integral (1) die Gestalt

$$I = \iint F(\lambda_{(zy)}, \lambda_{(xz)}, \lambda_{(ty)}, \lambda_{(xt)}, \lambda_{(xy)}, z, t, x, y)\, du\, dv$$

und als Variation von I erhalten wir

$$\delta I = \iint \{F_{\lambda_{(zy)}} \delta\lambda_{(zy)} + F_{\lambda_{(xz)}} \delta\lambda_{(xz)} + F_{\lambda_{(ty)}} \delta\lambda_{(ty)} + F_{\lambda_{(xt)}} \delta\lambda_{(xt)} + F_{\lambda_{(xy)}} \delta\lambda_{(xy)} + F_z \delta z + F_t \delta t + F_x \delta x + F_y \delta y\}\, du\, dv.$$

Daraus entsteht durch partielle Integration und Berücksichtigung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen:

$$\delta I = \int_L \left\{F_{\lambda_{(zy)}}\left(\delta z \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dz}{d\sigma}\right) + F_{\lambda_{(xz)}}\left(\delta x \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dx}{d\sigma}\right) + F_{\lambda_{(ty)}}\left(\delta t \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dt}{d\sigma}\right) + F_{\lambda_{(xt)}}\left(\delta x \frac{dt}{d\sigma} - \delta t \frac{dx}{d\sigma}\right) + F_{\lambda_{(xy)}}\left(\delta x \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dx}{d\sigma}\right)\right\} d\sigma;$$

durch Rückkehr zu den ursprünglichen Größen erhalten wir sonach hier als Grenzformel der Variationsrechnung die Relation:

$$\text{(5)} \quad \delta I = \int_L \left\{(f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y} - t_x f_{t_x} - t_y f_{t_y})\left(\delta x \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dx}{d\sigma}\right) + f_{z_x}\left(\delta z \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dz}{d\sigma}\right) + f_{z_y}\left(\delta x \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dx}{d\sigma}\right) + f_{t_x}\left(\delta t \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dt}{d\sigma}\right) + f_{t_y}\left(\delta x \frac{dt}{d\sigma} - \delta t \frac{dx}{d\sigma}\right)\right\}$$

In analoger Weise, wie im vorigen Abschnitt können wir die funktionalen Abteilungen einer Linienfunktion $S[L]$ des R_4 als

---

1) Es ist zu beachten, daß unter den kleinen Determinanten λ die Determinante $\lambda_{(zt)}$ nicht auftritt und sie also auch in F nicht vorkommt. Es ist daher $F_{\lambda_{(zt)}} \equiv 0$.

Komponenten eines Vierervektors S_x, S_y, S_z, S_t definieren. Die Variation der Linienfunktion $S[L|]$ hat die Gestalt

$$\delta S = \int_L \{S_x\,\delta x + S_y\,\delta y + S_z\,\delta z + S_t\,\delta t\}\,d\sigma \tag{6}$$

woraus hervorgeht, daß

$$S_x\frac{dx}{d\sigma} + S_y\frac{dy}{d\sigma} + S_z\frac{dz}{d\sigma} + S_t\frac{dt}{d\sigma} = 0 \tag{7}$$

ist, d. h. daß der Vierervektor S_x, S_y, S_z, S_t in der Normalhyperebene der Raumkurve L an der betrachteten Stelle σ liegen muß.

Aus (7) folgt, daß der Vierervektor S_x, S_y, S_z, S_t als ein vektorielles Produkt aufgefaßt werden kann, das gebildet wird von dem Vierervektor $\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma}, \frac{dt}{d\sigma}$ und einen Sechservektor

$$\{S_{yx}, S_{zx}, S_{yz}, S_{tx}, S_{yt}, S_{zt}\}$$

in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned}
S_x &= S_{yx}\frac{dy}{d\sigma} + S_{zx}\frac{dz}{d\sigma} + S_{tx}\frac{dt}{d\sigma}\\
S_y &= S_{xy}\frac{dx}{d\sigma} + S_{zy}\frac{dz}{d\sigma} + S_{ty}\frac{dt}{d\sigma}\\
S_z &= S_{xz}\frac{dx}{d\sigma} + S_{yz}\frac{dy}{d\sigma} + S_{tz}\frac{dt}{d\sigma}\\
S_t &= S_{xt}\frac{dx}{d\sigma} + S_{yt}\frac{dy}{d\sigma} + S_{zt}\frac{dz}{d\sigma}
\end{aligned}\right\} \quad (S_{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}). \tag{8}$$

Die Komponenten des Sechservektors sind natürlich durch die Gleichungen (8) nicht eindeutig bestimmt, sondern es ist die allgemeine Lösung, wenn $S'_{yx}, \ldots$ eine spezielle Lösung ist,

$$S_{yx} = S'_{yx} + c\frac{dt}{d\sigma} - d\cdot\frac{dz}{d\sigma} \tag{8*}$$

u. s. w.

wo die Zusatzterme sich als zweigliedrige Determinanten aus der Matrix

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c & d \\ \frac{dx}{d\sigma} & \frac{dy}{d\sigma}, & \frac{dz}{d\sigma} & \frac{dt}{d\sigma} \end{matrix}\right\|$$

bestimmen, unter den a, b, c, d beliebige Konstante (für jeden Punkt σ von L) verstanden. Führen wir in Gleichung (6) für die Komponenten des Vierervektors ihre Ausdrücke (8) ein, so erhält sie die Gestalt

$$(9)\quad \delta S = \int_L \Big\{ S_{yx}\Big(\delta x \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dx}{d\sigma}\Big) + S_{yz}\Big(\delta z \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dz}{d\sigma}\Big) + S_{zx}\Big(\delta x \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dx}{d\sigma}\Big) + S_{yt}\Big(\delta t \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dt}{d\sigma}\Big) + S_{tx}\Big(\delta x \frac{dt}{d\sigma} - \delta t \frac{dx}{d\sigma}\Big) + S_{zt}\Big(\delta t \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dt}{d\sigma}\Big)\Big\} d\sigma.$$

Durch Vergleich der beiden Formeln (5) und (9) erhalten wir für das Extremalintegral

$$(10)\quad I_{xy} = z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} + t_x f_{t_x} + t_y f_{t_y} - f,\quad I_{yz} = f_{z_z},\ I_{zx} = f_{z_y},\ I_{yt} = f_{t_x},\ I_{tx} = f_{t_y}$$

als die (Volterraschen) Ableitungen nach den Koordinatenebenen, während sich I_{zt} als identisch Null ergibt. Dabei ist über die vier Willkürlichkeiten wieder in bestimmter Weise verfügt, insbesondere ist $a = 0$, $b = 0$ gesetzt.

Wollen wir von vornherein die Unbestimmtheit, die in diese (Volterraschen) Ableitungen eingeht, vermeiden, so müssen wir die Hadamard-Lévysche Auffassung heranziehen. Statt der Kurve L haben wir dann deren Projektion C in der (x, y)-Ebene als Integrationsweg für das Kurvenintegral der Formel (5) zu wählen. Wenn wir δx und δy nach Formel (14) von p. 42 durch δn ersetzen und auf C die natürlichen Ableitungen $\frac{dz}{ds}$, $\frac{dt}{ds}$ bezw. $\frac{dz}{dn}$, $\frac{dt}{dn}$ der Funktionen $z(x, y)$ und $t(x, y)$ in Erweiterung der Gleichungen (27) und (28) von p. 45 einführen, so erhält diese Formel die Gestalt

$$(11)\quad \delta I^* = \int_C \{(z_n \overline{f}_{z_n} + t_n \overline{f}_{t_n} - \overline{f})\,\delta n - \overline{f}_{z_n}\,\delta z - \overline{f}_{t_n}\,\delta t\}\, ds.$$

Also erhalten wir für das Extremalintegral als seine funktionalen Ableitungen (nach Hadamard-Lévy):

$$(12)\quad \begin{cases} I_n^* = z_n \overline{f}_{z_n} + t_n \overline{f}_{t_n} - \overline{f} \\ I_z^* = -\overline{f}_{z_n} \\ I_t^* = -f_{t_n}, \end{cases}$$

sie drücken sich vermöge der (Volterraschen) Ableitungen nach den Koordinatenebenen, wie aus der Ableitung hervorgeht, in folgender Weise aus:

$$I_n^* = I_{xy} - \frac{dz}{ds}\Big(I_{yz}\frac{dx}{ds} + I_{zx}\frac{dy}{ds}\Big) - \frac{dt}{ds}\Big(I_{yt}\frac{dx}{ds} + I_{tx}\frac{dy}{ds}\Big)$$

$$(13)\quad I_z^* = I_{yz}\frac{dy}{ds} - I_{zx}\frac{dx}{ds}$$

$$I_t^* = I_{yt}\frac{dy}{ds} - I_{tx}\frac{dx}{ds}.$$

3) Die Gleichung für die partiellen funktionalen Ableitungen des Extremalintegrals.

In derselben Weise, wie im vorigen Abschnitt, ergibt sich auch hier, daß bei Kenntnis des Extremalintegrals als Linienfunktion des R_4 die Integration des Systems (3) der Euler-Lagrangeschen Gleichungen geleistet wäre, daß also insbesondere zu einer vorgegebenen Raumkurve L die Extremale angegeben werden könnte, welche durch sie hindurchgeht und im Inneren des von L begrenzten Bereiches keinen singulären Punkt enthält. Es kommt also darauf an, das Extremalintegral direkt berechnen zu können und wir finden den Ansatz dazu in analoger Weise wie im vorigen Abschnitt; es zeigt sich, daß das Extremalintegral $I[L]$ einer partiellen funktionalen Differentialgleichung genügt.

Legen wir (Volterrasche) funktionale Ableitungen zu Grunde, so können wir gemäß den Relationen (10) aus

$$f_{z_x} = \pi, \quad f_{z_y} = \varkappa, \quad f_{t_x} = \psi, \quad f_{t_y} = \chi$$

die vier partiellen Ableitungen z_x, z_y, t_x, t_y berechnen und unter Elimination dieser Ableitungen die Funktion

$$(14) \qquad H(z, t, x, y, \pi, \varkappa, \psi, \chi) = z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} + t_x f_{t_x} + t_y f_{t_y} - f$$

bilden, dann wird

$$\frac{\partial H}{\partial \pi} = z_x, \quad \frac{\partial H}{\partial \varkappa} = z_y, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi} = t_x, \quad \frac{\partial H}{\partial \chi} = t_y$$

und, wenn wir jetzt

$$\pi = I_{yz}, \quad \varkappa = I_{zx}, \quad \psi = I_{yt}, \quad \chi = I_{tx}$$

einsetzen, so besteht nach der ersten der Relationen (10) zwischen den partiellen funktionalen Ableitungen des Extremalintegrals die Gleichung

$$(15) \qquad I_{xy} = H(z, t, x, y, I_{yz}, I_{zx}, I_{yt}, I_{tx}),$$

wobei die in den funktionalen Ableitungen (nach Volterra) noch willkürlichen beiden Größen c und d durch die Nebenbedingungen

$$(15^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{d\sigma} = \dfrac{\partial H}{\partial \pi}\dfrac{dx}{d\sigma} + \dfrac{\partial H}{\partial \varkappa}\dfrac{dy}{d\sigma} \\ \dfrac{dt}{d\sigma} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}\dfrac{dx}{d\sigma} + \dfrac{\partial H}{\partial \chi}\dfrac{dy}{d\sigma} \end{cases}$$

festgelegt werden.

Knüpfen wir an die (Hadamard-Lévyschen) Ableitungen an, so müssen wir aus den Relationen

$$I_z^* = -\bar{f}_{z_n}, \quad I_t^* = -\bar{f}_{t_n}$$

die normalen Ableitungen z_n und t_n berechnen und unter Einsetzen der berechneten Ausdrücke die Funktion

$$K(I_z^*, I_t^*, z, z_s, t, t_s, x, y, x_s) = z_n \bar{f}_{z_n} + t_n \bar{f}_{t_n} - \bar{f} \tag{16}$$

bilden, woraus die partielle funktionale Differentialgleichung

$$I_n^* = K(I_z^*, I_t^*, z, z_s, t, t_s, x, y, x_s) \tag{17}$$

hervorgeht.

Wenn wir die Überlegung, die wir im vorigen Abschnitt über die zu (15) und (17) analogen Gleichungen anstellten, genau auf die hier vorliegenden Gleichungen übertragen, so ergibt sich, daß das Extremalintegral, wenn wir es in der bisherigen Weise durch die Raumkurve L bestimmt denken, nicht das einzige Integral dieser partiellen funktionalen Differentialgleichung ist, und es besteht die Schwierigkeit, gerade diese spezielle Lösung aus der Gesamtheit der Lösungen auszusondern.

Um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen, wollen wir zwei Kurven L_0 und L betrachten und voraussetzen, daß sie sich durch eine Extremale verbinden lassen, welche im Inneren des von ihnen begrenzten, (zweifach zusammenhängenden) Bereichs ohne Singularitäten ist. Das über diesen zweifach zusammenhängenden Bereich erstreckte Extremalintegral

$$I[L, L_0|] = \int_{L_0}^{L} \!\!\int f(z_x z_y, z, t_x, t_y, t, x, y)\, dx\, dy \tag{18}$$

genügt mit seinen funktionalen Ableitungen den Gleichungen (15) bezw. (17) für jeden Punkt beider Kurven L_0 und L.

Halten wir die Kurve L_0 fest und lassen L variieren, so bildet die Gesamtheit der Extremalen, die sich von L_0 nach allen Kurven L ziehen lassen, ein Funktionsfeld; das Extremalintegral (18) stellt in diesem Funktionsfelde eine Kurvenbelegung des Raumes her, die ein Integral der partiellen funktionalen Differentialgleichung bildet. Variieren wir nachträglich die Kurve L_0, so variiert auch das Funktionsfeld und die zugehörige Kurvenbelegung, so daß wir eine von einer willkürlichen Kurve des R_4 abhängige Menge von Integralen erhalten; das Funktionsfeld definiert, wie wir später (§ 3) genauer darlegen, sobald L_0 als variabel angesehen wird, ein vollständiges Integral der Gleichung (15) bezw. (17).

Vermöge eines solchen vollständigen Integrals läßt sich nun die Randwertaufgabe für die Euler-Lagrangeschen Gleichungen (3) lösen, wenn wir als Berandung zwei Kurven L_0 und L vorgegeben denken und die gegebene Kurve L_0 als Anfangskurve für die Linienfunktion (18) wählen. Die funktionalen Ableitungen des Extremalintegrals I sind nach der Grenzformel der Variationsrechnung in jedem Punkt von L_0 immer die gleichen, solange die Kurve L auf ein und derselben Extremalen des Funktionsfeldes bleibt. Bilden wir daher diese Ableitungen nach den Funktionen z und t und setzen sie neuen willkürlichen Funktionen ζ und τ gleich

$$I_z^* = \zeta(s_0), \quad I_t^* = \tau(s_0), \tag{19}$$

so entspricht jeder Wahl dieser Funktionen $\zeta(s_0)$ und $\tau(s_0)$ eine ganz bestimmte Extremale. Soll also die Extremale insbesondere durch die gegebene Kurve L hindurchgehen, so ist in die Ableitungen (19) von I die Kurve L einzuführen und dann sind aus den Gleichungen (19) die Funktionen ζ und τ zu bestimmen. Damit kennen wir die normalen Ableitungen der gesuchten Extremale auf L_0 und können diese von L_0' aus konstruieren.

5) Das Funktionsfeld der Extremalen und die partielle funktionale Differentialgleichung.

Anstatt des speziellen Funktionsfeldes, das aus allen von einer gegebenen Kurve L_0 des R_4 ausgehenden Extremalen besteht, können wir ein allgemeineres Funktionsfeld gegeben denken, welches nur der Bedingung unterliegt, daß durch jede Kurve L des betrachteten Bereiches eine und nur eine Extremale des Funktionsfeldes hindurchgeht. Denken wir auf jeder Extremalen des Funktionsfeldes eine „Anfangskurve“ L_0 bestimmt, so stellt das Extremalintegral

$$W[L] = \int_{L_0}^{L} E f(z_x, z_y, z, t_x, t_y, t, x, y)\, dx\, dy \tag{20}$$

eine Kurvenbelegung des Raumes her.

Um die Bedingung aufzusuchen, wann die so definierte Linienfunktion $W[L] = W[C, z(s), t(s)]$ der partiellen funktionalen Differentialgleichung (17) genügt, bilden wir die Variation

$$\delta W = \int_C \{(z_n \overline{f}_{z_n} + t_n \overline{f}_{t_n} - \overline{f})\, \delta n - \overline{f}_{z_n} \delta z - \overline{f}_{t_n} \delta t\}\, ds \tag{21}$$

$$- \int_{C_0} \{(z_n \overline{f}_{z_n} + t_n \overline{f}_{t_n} - \overline{f})\, \delta n_0 - \overline{f}_{z_n} \delta z_0 - \overline{f}_{t_n} \delta t_0\}\, ds_0,$$

wobei $L_0 = [C_0, z_0(s_0), t_0(s_0)]$ ist und die Variation von L_0 durch die von L bestimmt ist, also die Relationen bestehen

$$(22)\quad \begin{cases} \delta z_0(s_0) = \int_C \{\delta z_0'(s_0, s)\,\delta n + \delta z_0''(s_0, s)\,\delta z + \delta z_0'''(s_0, s)\,\delta t\}\,ds \\ \delta t_0(s_0) = \int_C \{\delta t_0'(s_0, s)\,\delta n + \delta t_0''(s_0, s)\,\delta z + \delta t_0'''(s_0, s)\,\delta t\}\,ds \\ \delta n_0(s_0) = \int_C \{\delta n_0'(s_0, s)\,\delta n + \delta n_0''(s_0, s)\,\delta z + \delta n_0'''(s_0, s)\,\delta t\}\,ds. \end{cases}$$

Aus (21) ergeben sich somit als die funktionalen Ableitungen der Linienfunktion $W[L]$

$$W_n^* = z_n\bar{f}_{z_n} + t_n\bar{f}_{t_n} - \bar{f} - \int_{C_0}\{(z_n\bar{f}_{z_n} + t_n\bar{f}_{t_n} - \bar{f})\,\delta n_0' - \bar{f}_{z_n}\,\delta z_0' - \bar{f}_{t_n}\,\delta t_0'\}\,ds_0$$

$$W_z^* = -\bar{f}_{z_n} \qquad - \int_{C_0}\{(z_n\bar{f}_{z_n} + t_n\bar{f}_{t_n} - \bar{f})\,\delta n_0'' - \bar{f}_{z_n}\,\delta z_0'' - \bar{f}_{t_n}\,\delta t_0''\}\,ds_0$$

$$W_t^* = -\bar{f}_{t_n} \qquad - \int_{C_0}\{(z_n\bar{f}_{z_n} + t_n\bar{f}_{t_n} - \bar{f})\,\delta n_0''' - \bar{f}_{z_n}\,\delta z_0''' - \bar{f}_{t_n}\,\delta t_0'''\}\,ds_0.$$

Soll daher die Linienfunktion $W[L]$ der partiellen funktionalen Differentialgleichung (17) genügen, so muß das Integral in diesen Formeln verschwinden. Dies wird eintreten, wenn die Kurve L_0 der Bedingung

$$(23)\qquad (z_n\bar{f}_{z_n} + t_n\bar{f}_{t_n} - \bar{f})^{C_0}\,\delta n_0 - (\bar{f}_{z_n})^{C_0}\,\delta z_0 - (\bar{f}_{t_n})^{C_0}\,\delta t_0 = 0$$

genügt, welche, wenn wir zu den Koordinaten x und y zurückkehren, die Gestalt erhält

$$\frac{dy}{ds_0}\left[(f - z_x f_{z_x} - t_x f_{t_x})^{L_0}\,\delta x_0 - (z_y f_{z_x} + t_y f_{t_x})^{L_0}\,\delta y_0 + (f_{z_x})^{L_0}\delta z_0 + (f_{t_x})^{L_0}\,\delta t_0\right]$$

$$- \frac{dx}{ds_0}\left[-(z_x f_{z_y} + t_x f_{t_y})^{L_0}\,\delta x_0 + (f - z_y f_{z_y} - t_y f_{t_y})^{L_0}\,\delta y_0 + (f_{z_y})^{L_0}\,\delta z_0 + (f_{t_y})^{L_0}\,\delta t_0\right] =$$

wegen der Willkürlichkeit der Kurve L_0 folgen hieraus für die Fortschreitungsrichtungen die beiden Gleichungen:

$$(23^*)\quad \begin{cases} (f - z_x f_{z_x} - t_x f_{t_x})^{L_0}\,\delta x_0 - (z_y f_{z_x} + t_y f_{t_x})^{L_0}\,\delta y_0 + (f_{z_x})^{L_0}\,\delta z_0 + (f_{t_x})^{L_0}\,\delta t_0 = 0 \\ -(z_x f_{z_y} + t_x f_{t_y})^{L_0}\,\delta x_0 + (f - z_y f_{z_y} - t_y f_{t_y})^{L_0}\,\delta y_0 + (f_{z_y})^{L_0}\,\delta z_0 + (f_{t_y})^{L_0}\,\delta t_0 = 0\ ^{1}). \end{cases}$$

1) Würden wir aus dem Funktionsfelde ein Parameterfeld herausgreifen, so würden die Koeffizienten der Inkremente in diesen Gleichungen Funktionen des Ortes, d. h. Funktionen von x, y, z, t. Die beiden Gleichungen stellen dann zwei totale lineare Differentialgleichungen für die beiden Funktionen x und y der Variabeln z und t vor. Damit sie vollständig integrabel sind und eine zweiparametrige Flächenschar, die „Transversalen" des Feldes, bestimmen:

6) *Die Funktionsfelder und die Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichungen.*

Es gibt stets Funktionsfelder, welche die Bedingung (23) erfüllen; wir erhalten ein solches, wenn wir innerhalb des Raumes R_4, welcher über dem von zwei Kurven C_1 und C_2 begrenzten Bereiche der (x, y)-Ebene liegt, eine Hyperfläche gegeben denken und alle Extremalen so konstruieren, daß sie zu ihr „transversal“ sind, d. h. in folgender Weise: Wir ziehen auf der Hyperfläche alle geschlossenen Kurven, die sich auf ihr nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Sei $L = (C, z(s), t(s))$ eine beliebige solche Kurve, so kennen wir auf ihr unmittelbar die Ableitungen $\frac{dz}{ds}$ und $\frac{dt}{ds}$; die Hyperebene in einem betrachteten Punkte, deren Spur in der (x, y)-Ebene normal auf der Projektion C ist, schneidet auf der gegebenen Hyperfläche eine zweidimensionale Fläche aus, in welcher $\frac{\delta z}{\delta n}$ (bei konstantem t) und $\frac{\delta t}{\delta n}$ (bei konstantem z) bestimmt sind. Wenn wir dann durch L eine Extremale so legen, daß die normalen Ableitungen $z_n(s)$, $t_n(s)$ aus den Gleichungen

$$(24)\qquad \begin{cases} (z_n \bar{f}_{z_n} + t_n \bar{f}_{t_n} - \bar{f})\,\delta n - \bar{f}_{z_n}\,\delta z = 0, \\ (z_n \bar{f}_{z_n} + t_n \bar{f}_{t_n} - \bar{f})\,\delta n - \bar{f}_{t_n}\,\delta t = 0 \end{cases}$$

berechnet sind, so ist für jede Extremale auf der Anfangskurve die Bedingung (23) erfüllt, in dem konstruierten Funktionsfelde bildet also die Kurvenbelegung durch das Extremalintegral eine Lösung der partiellen funktionalen Differentialgleichung (17).

Um die Lösung der Randwertaufgabe der Euler-Lagrangeschen Gleichungen zu gewinnen, müssen wir ein vollständiges Integral der Gleichung (17) zur Verfügung haben. Ein solches erhalten wir in einem Funktionsfelde, welches noch von zwei willkürlichen Funktionen $\alpha(u)$ und $\beta(u)$ in einem bestimmten Intervalle,

---

$$x = x(z, t, \lambda, \mu), \quad y = y(z, t, \lambda, \mu)$$

(wo λ und μ zwei Parameter), müssen zwei leicht angebbare Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein. Es liegt die Frage nahe, ob in gleicher Weise, wie im ersten Abschnitt, diese beiden Integrabilitätsbedingungen zusammen mit den Differentialgleichungen für die Gefällfunktionen des Feldes, die sich auch hier sofort aus den Euler-Lagrangeschen Gleichungen herleiten, aussagen, daß das Parameterfeld ein „Unabhängigkeitsfeld“ ist. Es treten indessen in den Integrabilitätsbedingungen gewisse Terme auf, welche die Beantwortung dieser Frage nicht als sehr einfach erscheinen lassen.

etwa von 0 bis 1, abhängt, z. B. würde dies in dem obigen Beispiele erfüllt sein, wenn die Hyperfläche von den beiden Funktionen abhängen würde.

Allgemein sei

$$I = I[L, \alpha(\overset{1}{\underset{0}{u}}), \quad \beta(\overset{1}{\underset{0}{u}})] \tag{25}$$

eine Kurvenbelegung eines Funktionsfeldes, welche ein vollständiges Integral von (17) vorstellt, dann variieren mit $\alpha(u)$ und $\beta(u)$ natürlich die Extremalen und auch die Anfangskurven L_0. Halten wir eine bestimmte Kurve L fest, so erhalten wir nach der Grenzformel der Variationsrechnung für die Variation von $I[L, \alpha(\overset{1}{\underset{0}{u}}), \beta(\overset{1}{\underset{0}{u}})]$ mit $\alpha(u)$ und $\beta(u)$:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_0^1 \{ I_\alpha \, \delta\alpha + I_\beta \, \delta\beta \} \, du \\ &= \int_{C_0} \{ (z_n \overline{f}_{z_n} + t_n \overline{f}_{t_n} - \overline{f}) \, \delta n_0^* - \overline{f}_{z_n} \delta z_0^* - \overline{f}_{t_n} \delta t_0^* \} \, ds_0, \end{aligned} \tag{26}$$

wobei

$$\left\{ \begin{aligned} \delta n_0^*(s_0) &= \int_0^1 (\delta n_0^{(\alpha)}(s_0, u) \, . \, \delta\alpha + \delta n_0^{(\beta)}(s_0, u) \, . \, \delta\beta) \, du \\ \delta z_0^*(s_0) &= \int_0^1 (\delta z_0^{(\alpha)}(s_0, u) \, . \, \delta\alpha + \delta z_0^{(\beta)}(s_0, u) \, . \, \delta\beta) \, du, \\ \delta t_0^*(s_0) &= \int_0^1 (\delta t_0^{(\alpha)}(s_0, u) \, . \, \delta\alpha + \delta t_0^{(\beta)}(s_0, u) \, . \, \delta\beta) \, du \end{aligned} \right. \tag{27}$$

sind, so daß sich die funktionalen Ableitungen von I nach α und β zu

$$\left\{ \begin{aligned} I_\alpha &= \int_{C_0} \{ (z_n \overline{f}_{z_n} + t_n \overline{f}_{t_n} - \overline{f}) \, \delta n_0^{(\alpha)} - \overline{f}_{z_n} \delta z_0^{(\alpha)} - \overline{f}_{t_n} \delta t_0^{(\alpha)} \} \, ds_0 \\ I_\beta &= \int_{C_0} \{ (z_n \overline{f}_{z_n} + t_n \overline{f}_{t_n} - \overline{f}) \, \delta n_0^{(\beta)} - \overline{f}_{z_n} \delta z_0^{(\beta)} - \overline{f}_{t_n} \delta t_0^{(\beta)} \} \, ds_0 \end{aligned} \right. \tag{28}$$

ergeben. Diese Ableitungen haben für alle Kurven L, welche auf derselben Extremalen liegen, den gleichen Wert, solange die Abszisse u, für welche die funktionalen Ableitungen genommen sind, festgehalten wird. Die Extremalen sind sonach durch die Gleichungen

$$I_\alpha [L, \alpha(\overset{1}{\underset{0}{u}}), \beta(\overset{1}{\underset{0}{u}})] = c^{(\alpha)}(u), \quad I_\beta [L, \alpha(\overset{1}{\underset{0}{u}}), \beta(\overset{1}{\underset{0}{u}})] = c^{(\beta)}(u) \tag{29}$$

charakterisiert.

Die Randwertaufgabe für zwei vorgegebene Kurven L_1 und L_2 erledigt sich dann in der alten Weise von pg. 54. In einem bestimmten der Funktionsfelder bilden wir die beiden Werte

$$I_1 = I[L_1, \alpha(\overset{1}{\underset{0}{u}}), \beta(\overset{1}{\underset{0}{u}})] \quad \text{und} \quad I_2 = I[L_2, \alpha(\overset{1}{\underset{0}{u}}), \beta(\overset{1}{\underset{0}{u}})];$$

sollen beide Kurven L_1 und L_2 auf derselben Extremalen liegen, so müssen die Gleichungen

$$(30) \qquad (I_1)_\alpha - (I_2)_\alpha = 0, \qquad (I_1)_\beta - (I_2)_\beta = 0$$

für alle Werte von u im Intervall 0 bis 1 bestehen. Daraus berechnen wir die Funktionen $\alpha(u)$ und $\beta(u)$ im Intervall 0 bis 1 und haben dann dasjenige Funktionsfeld ermittelt, in welchem die durch L_1 hindurchgehende Extremale gleichzeitig durch L_2 hindurchgeht.

§ 2.

Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen und die zugehörigen kanonischen Systeme.

1) Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen und die kanonischen Systeme.

Wenn wir jetzt die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(f_{z_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{z_y}) + f_z &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(f_{t_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f_{t_y}) - f_t &= 0 \end{aligned}$$

vom Standpunkt der allgemeinen Integrationstheorie aus behandeln wollen, so tritt an die Stelle der Randwertaufgabe, wie sie im § 1 an die Spitze gestellt wurde, das Problem, eine Extremale so zu bestimmen, daß sie für eine gegebene Kurve C neben gegebenen Funktionswerten

$$(2) \qquad z = z(s), \qquad t = t(s)$$

auch vorgeschriebene normale Ableitungen

$$(2^*) \qquad \frac{dz}{dn} = z_n(s), \qquad \frac{dt}{dn} = t_n(s)$$

besitzt. Eine solche Extremale kann nach dem Cauchyschen Verfahren des calcul des limites konstruiert werden, denn nach (2) und (2*) sind auf C außer z und t auch die vier partiellen Ableitungen erster Ordnung z_x, z_y, t_x, t_y bekannt.

Durch Anwendung der Legendreschen Transformation

$$(3) \qquad \pi = f_{z_x}, \qquad \varkappa = f_{z_y}, \qquad \psi = f_{t_x}, \qquad \chi = f_{t_y}$$

können wir das System (1) der beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in das folgende kanonische System von sechs partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung überführen,

$$(4)\qquad \begin{cases} z_x = \dfrac{\partial H}{\partial \pi}, \qquad z_y = \dfrac{\partial H}{\partial \varkappa} \\ \pi_x + \varkappa_y = -\dfrac{\partial H}{\partial z}, \\ t_x = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}, \qquad t_y = \dfrac{\partial H}{\partial \chi} \\ \psi_x + \chi_y = -\dfrac{\partial H}{\partial t}, \end{cases}$$

wo in Übereinstimmung mit Gleichung (14) von pg. 81

$$H(z, t, x, y, \pi, \varkappa, \psi, \chi) = z_x f_{z_x} + z_y f_{z_y} + t_x f_{t_x} + t_y f_{t_y} - f$$

eingeführt ist.

Für dieses erste kanonische System haben wir wieder die Schwierigkeit, daß auf einer ebenen Kurve C die Werte aller 6 unbekannten Funktionen nicht willkürlich vorgegeben werden können, sondern zwei Integrabilitätsbedingungen genügen müssen.

Um diese Nebenbedingungen zu vermeiden, führen wir ein zweites kanonisches System ein. Dazu ziehen wir die natürlichen Ableitungen z_x, z_n, t_s, t_n von z und t auf C heran, wodurch f in die Funktion $\bar{f}(z_s, z_n, z, t_s, t_n, t, x, y, x_s)$ übergeht.

Eliminieren wir die Ableitungen z_n und t_n vermöge

$$\varphi = -\bar{f}_{z_n}, \qquad \omega = -\bar{f}_{t_n}$$

und führen in Übereinstimmung mit Gleichung (16) von pg. 82 die neue Funktion

$$K(\varphi, \omega, z, z_s, t, t_s, x, y, x_s) = z_n \bar{f}_{z_n} + t_n \bar{f}_{t_n} - \bar{f}$$

ein, so erhalten wir das zweite kanonische System

$$(5)\qquad \begin{cases} \delta z = -\dfrac{\partial K}{\partial \varphi}\,\delta n \\ \delta \varphi = -\dfrac{d}{ds}(K_{z_s}\,\delta n) + (k\varphi + K_z)\,\delta n \\ \delta t = -\dfrac{\partial K}{\partial \omega}\,\delta n \\ \delta \omega = -\dfrac{d}{ds}(K_{t_s}\,\delta n) + (k\omega + K_t)\,\delta n. \end{cases}$$

Dies System kann als System von vier totalen funktionalen Differentialgleichungen angesehen werden, die Extremale läßt sich bei solcher Auffassung nach dem Cauchy-Lipschitzschen Verfahren oder der Methode der successiven Approximation bestimmen.

2) Die charakteristische „relative Integralinvariante" und das Unabhängigkeitsfeld.

Die folgenden Betrachtungen knüpfen zunächst wieder an die Euler-Lagrangeschen Gleichungen selbst an. Auf einer gegebenen Extremale ziehen wir eine geschlossene Kurve L und betrachten unter Anknüpfung an die Grenzformel (5) von pg. 78 das über L erstreckte Integral

$$\delta R[L] = \int_L \Big\{ (f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y} - t_x f_{t_x} - t_y f_{t_y}) \Big(\delta x \frac{dy}{d\sigma} - dy \frac{dx}{ds} \Big)$$

$$+ f_{z_x} \Big(\delta z \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dz}{d\sigma} \Big) + f_{z_y} \Big(\delta x \frac{dz}{d\sigma} - \delta z \frac{dx}{ds} \Big) + f_{t_x} \Big(\delta t \frac{dy}{d\sigma} - \delta y \frac{dt}{d\sigma} \Big) + f_{t_y} \Big(\delta x \frac{dt}{d\sigma} - \delta t \frac{dx}{d\sigma} \Big) \Big\} d\sigma,$$

wo die δx, δy, δz, δt zunächst beliebige Inkremente bedeuten.

Dann denken wir uns ein Parameterfeld von Extremalen

$$(7) \qquad z = z(x, y, a, b), \qquad t = t(x, y, a, b)$$

gegeben und schneiden dieses Feld mit einer bestimmten (röhrenförmigen) Hyperfläche. Die Extremalen des Feldes schneiden die Hyperfläche je in einer bestimmten Kurve und wir wollen die Hyperfläche so bestimmt denken, daß alle Schnittkurven geschlossene Kurven sind. (Diese Annahme soll eben der Zusatz „röhrenförmig" ausdrücken.) Nach der Fundamentaleigenschaft des Feldes wird die Hyperfläche von den Schnittkurven mit den Extremalen einfach und lückenlos erfüllt. Eine zweite durch das Feld in der angegebenen Weise gelegte Hyperfläche wird ebenfalls von den Extremalen in einer zweiparametrigen Kurvenschar geschnitten und von dieser einfach und lückenlos erfüllt. Dabei sind die Kurven der beiden zweiparametrigen Kurvenscharen einander eineindeutig zugeordnet durch die Extremale des Feldes, welche zwei zusammengehörige Kurven verbindet.

Auf der ersten Hyperfläche denken wir uns aus der zweiparametrigen Kurvenschar eine solche einparametrige Schar herausgegriffen, welche in der (dreidimensionalen) Hyperfläche eine geschlossene Fläche (M_2) bildet; der Parameter dieser einparametrigen Schar sei α. Auf der zweiten Hyperfläche ist dieser einpara-

metrigen Schar eine einparametrige Kurvenschar zugeordnet, welche ebenfalls eine geschlossene Fläche bildet.

Zwei zusammengehörige Kurven $L_1(\alpha)$ und $L_2(\alpha)$ der beiden Kurvenscharen grenzen auf der Feldextremalen, welche sie verbindet, ein bestimmtes Flächenstück ab, der zugehörige Wert des Extremalintegrals erscheint somit als eine Funktion von α:

$$I(\alpha) = \int_{L_1(\alpha)}^{L_2(\alpha)} E\!\int f(z_x, z_y, z, t_x, t_y, t, x, y)\, dx\, dy \qquad \begin{pmatrix} z = z(x, y, a(\alpha), b(\alpha)) \\ t = t(x, y, a(\alpha), b(\alpha)) \end{pmatrix}$$

Nach der Grenzformel der Variationsrechnung ist seine Ableitung nach α

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \frac{\delta R[L_2(\alpha)|]}{\delta \alpha} - \frac{\delta R[L_1(\alpha)|]}{\delta a}; \tag{8}$$

integrieren wir diese Gleichung über die geschlossene Fläche der Kurven $L(\alpha)$, so ist

$$\int_{\bigcirc} \frac{\delta I}{\delta \alpha}\, \delta\alpha = 0$$

und somit ergibt sich

$$\int_{\bigcirc} \frac{\delta R[L_2(\alpha)|]}{\delta \alpha}\, \delta\alpha = \int_{\bigcirc} \frac{\delta R[L_1(\alpha)|]}{\delta \alpha}\, \delta\alpha,$$

d. h. es ist das Integral

$$\int_{\bigcirc} \delta\alpha \int_{L(\alpha)} \Big\{ (f - z_x f_{z_x} - z_y f_{z_y} - t_x f_{t_x} - t_y f_{t_y}) \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) + f_{z_x} \Big(\frac{\delta z}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma}$$

$$+ f_{z_y} \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dz}{d\sigma} - \frac{\delta z}{\delta \alpha} \frac{dx}{d\sigma} \Big) + f_{t_x} \Big(\frac{\delta t}{\delta \alpha} \frac{dy}{d\sigma} - \frac{\delta y}{\delta \alpha} \frac{dt}{d\sigma} \Big) + f_{t_y} \Big(\frac{\delta x}{\delta \alpha} \frac{dt}{d\sigma} - \frac{\delta t}{\delta \alpha} \frac{dx}{ds} \Big) \Big\}\, d\sigma = \text{Con} \tag{9}$$

wie auch die röhrenförmige Hyperfläche im Felde gelegt sein mag. Diese Tatsache drücken wir dadurch aus, daß wir das Integral (6) das Element einer „relativen Integralinvariante“ nennen.

Wenn wir aus der zweiparametrigen Schar der Schnittkurven des Feldes mit der Hyperfläche eine einparametrige Schar $L(\alpha)$ herausgreifen, so greifen wir gleichzeitig aus dem Felde (7) eine einparametrige Schar von Extremalen heraus, welche einen bestimmten dreidimensionalen (gekrümmten) Raum einfach und lückenlos erfüllen. Dieser dreidimensionale Raum enthält natürlich die von den Kurven $L(\alpha)$ gebildete zweidimensionale Fläche T. Bilden wir den gekrümmten dreidimensionalen Raum in den gewöhnlichen

linearen dreidimensionalen Raum ab, so wird sich die Fläche T entweder wieder als eine geschlossene Fläche, also als eine Art Torusfläche, abbilden oder ihre Abbildung wird eine nicht geschlossene (berandete) Fläche sein. Im ersteren Falle ist, wie auf pg. 62 ausgeführt ist, die Konstante in (9) gleich Null, im letzteren wird sie im allgemeinen von Null verschieden sein.

Führen wir in der Formel (9) x und y als Integrationsveränderliche ein, so erhalten wir

$$\int\int\left\{f+\left(\frac{\delta z}{\delta x}-z_x\right)f_{z_x}+\left(\frac{\delta z}{\delta y}-z_y\right)f_{z_y}+\left(\frac{\delta t}{\delta x}-t_x\right)f_{t_x}+\left(\frac{\delta t}{\delta y}-t_y\right)f_{t_y}\right\}dx\,dy = \text{Const.},$$

dabei ist links das Hilbertsche Integral erstreckt über eine geschlossene Fläche aufgetreten. Wir finden so, daß das betrachtete Feld (7) dann und nur dann ein Unabhängigkeitsfeld ist, wenn die Konstante in der Formel (9) auch für alle geschlossenen Flächen der zweiten Art gleich Null ist.

Aus der obigen Überlegung geht weiter hervor, daß wir in der relativen Integralinvariante (9) ohne Gefährdung der Allgemeinheit der Überlegungen die Fläche T, welche die Kurven $L(\alpha)$ trägt, so wählen können, daß sie auf einer „Zylinderhyperfläche C“ liegt, d. h. auf einer Hyperfläche, welche aus den Ebenen

$$x = \text{Const.}, \qquad y = \text{Const.}$$

besteht, die sich durch die einzelnen Punkte einer geschlossenen Kurve C der (x, y)-Ebene legen lassen. Für eine solche Zylinderhyperfläche C nimmt die Formel (9) die einfachere Gestalt an

$$(11)\quad \int_{\bigcirc}\delta\alpha\int_{C}\left\{\left(f_{z_x}\frac{dy}{ds}-f_{z_y}\frac{dx}{ds}\right)\frac{\delta z}{\delta\alpha}+\left(f_{t_x}\frac{dy}{ds}-f_{t_y}\frac{dx}{ds}\right)\frac{\delta t}{\delta\alpha}\right\}ds = \text{Const.}$$

Ist die Konstante in dieser Formel für jede einparametrige Kurvenschar $L(\alpha)$, welche auf der Zylinderhyperfläche C eine geschlossene Fläche bildet, gleich Null, dann und nur dann ist das gegebene Feld ein Unabhängigkeitsfeld.

3) Die zugehörige „absolute Integralinvariante“ und die „Jacobi'schen Gleichungen“.

Schreiben wir die Formel (11) in der Gestalt

$$\int_{C}ds\int_{\bigcirc}\left\{\left(f_{z_x}\frac{\delta z}{\delta\alpha}+f_{t_x}\frac{\delta t}{\delta\alpha}\right)\frac{dy}{ds}-\left(f_{z_y}\frac{\delta z}{\delta\alpha}+f_{t_y}\frac{\delta t}{\delta\alpha}\right)\frac{dx}{ds}\right\}d\alpha = \text{Const.},$$

so können wir das innere Integral, welches ein Kurvenintegral über die Kurve $a = a(\alpha)$, $b = b(\alpha)$ in der Ebene $s = \text{Const.}$ auf

der Zylinderhyperfläche C vorstellt, nach dem Stokesschen Satze in ein Doppelintegral umformen und erhalten so

$$\int_C ds \int\int \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial b}\left(f_{z_x}\frac{\partial z}{\partial a} + f_{t_x}\frac{\partial t}{\partial a}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(f_{z_x}\frac{\partial z}{\partial b} + f_{t_x}\frac{\partial t}{\partial b}\right)\right]\frac{dy}{ds} \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial}{\partial b}\left(f_{z_y}\frac{\partial z}{\partial a} + f_{t_y}\frac{\partial t}{\partial a}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(f_{z_y}\frac{\partial z}{\partial b} + f_{t_y}\frac{\partial t}{\partial b}\right)\right]\frac{dx}{ds} \right\} da\, db = \text{Const.}$$

als „absolute Integralinvariante“. Es ist darnach auch das Element dieser Invariante

$$(12)\quad \int_C \left\{ \left[\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial f_{z_x}}{\partial b} + \frac{\partial t}{\partial a}\frac{\partial f_{t_x}}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial f_{z_x}}{\partial a} - \frac{\partial t}{\partial b}\frac{\partial f_{t_x}}{\partial a}\right]\frac{dy}{ds} \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial f_{z_y}}{\partial b} + \frac{\partial t}{\partial a}\frac{\partial f_{t_y}}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial f_{z_y}}{\partial a} - \frac{\partial t}{\partial b}\frac{\partial f_{t_y}}{\partial a}\right]\frac{dx}{ds} \right\} ds$$

konstant, wie auch die Kurve C gewählt sein mag, solange wir auf einer bestimmten Extremalen des Feldes bleiben.

Die Relation (12) spricht eine Eigenschaft der Jacobischen Gleichungen, welche zu den Euler-Lagrangeschen Gleichungen (1) gehören, aus. Ist $\Phi(\mathfrak{z}_x, \mathfrak{z}_y, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}_x, \mathfrak{t}_y, \mathfrak{t}, x, y)$, als zweite Variation der Funktion f, die folgende quadratische Form mit 21 Termen

$$(13)\quad 2\Phi = f_{z_x z_x}\mathfrak{z}_x^2 + 2f_{z_x z_y}\mathfrak{z}_x\mathfrak{z}_y + f_{z_y z_y}\mathfrak{z}_y^2 + f_{t_x t_x}\mathfrak{t}_x^2 + \cdots + \cdots + f_{zz}\mathfrak{z}^2 + 2f_{zt}\mathfrak{z}.\mathfrak{t} + f_{tt}\mathfrak{t}^2,$$

so lauten die Jacobischen Gleichungen

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_{\mathfrak{z}_x}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\Phi_{\mathfrak{z}_y}) - \Phi_{\mathfrak{z}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_{\mathfrak{t}_x}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\Phi_{\mathfrak{t}_y}) - \Phi_{\mathfrak{t}} = 0. \end{cases}$$

Aus den Funktionen (7), welche das betrachtete Feld definieren, erhalten wir in ihren Ableitungen nach den Parametern

$$(15)\quad \mathfrak{z}^{(1)} = \frac{\partial z}{\partial a}, \quad \mathfrak{t}^{(1)} = \frac{\partial t}{\partial a}; \qquad \mathfrak{z}^{(2)} = \frac{\partial z}{\partial b}, \quad \mathfrak{t}^{(2)} = \frac{\partial t}{\partial b}$$

unmittelbar zwei Lösungssysteme der Jacobischen Gleichungen (14); weiter sieht man dann sofort, daß

$$\frac{\partial f_{z_x}}{\partial a} = \Phi_{\mathfrak{z}_x^{(1)}}, \qquad \frac{\partial f_{z_x}}{\partial b} = \Phi_{\mathfrak{z}_x^{(2)}}; \text{ u. s. w.}$$

ist; also besteht nach Gleichung (12) für zwei Lösungssysteme der Jacobischen Gleichungen (14) die Relation

$$\int_C \Big\{ (\mathfrak{z}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{z}^{(2)}_x} + \mathfrak{t}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{t}^{(2)}_x} - \mathfrak{z}^{(2)} \Phi_{\mathfrak{z}^{(1)}_x} - \mathfrak{t}^{(2)} \Phi_{\mathfrak{t}^{(1)}_x}) \frac{dy}{ds}$$

(16)

$$- (\mathfrak{z}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{z}^{(2)}_y} + \mathfrak{t}^{(1)} \Phi_{\mathfrak{t}^{(2)}_y} - \mathfrak{z}^{(2)} \Phi_{\mathfrak{z}^{(1)}_y} - \mathfrak{t}^{(2)} \Phi_{\mathfrak{t}^{(1)}_y}) \frac{dx}{ds} \Big\} ds = \text{Const.},$$

d. h. das Jacobische System (14) ist sich selbst adjungiert.

Die soeben benützten Lösungen (15) der Jacobischen Gleichungen sind nur ein spezieller Fall allgemeinerer Lösungen, die sich aus Lösungen der Euler-Lagrangeschen Gleichungen gewinnen lassen, welche nicht von Parametern, sondern von willkürlichen Funktionen abhängen. Haben wir ein System von Lösungen der Gleichungen (1), welches von zwei willkürlichen Funktionen $z_0(s_0)$, $t_0(s_0)$ auf einer festen Kurve C_0 der (x, y)-Ebene abhängt

$$z = Z(x, y;\ C_0, z_0(s_0), t_0(s_0)), \qquad t = T(x, y;\ C_0, z_0(s_0), t_0(s_0)),$$

(17)

so stellen die Variationen

$$\begin{cases} \delta z = \int_{C_0} (Z_{z_0}\, \delta z_0 + Z_{t_0}\, \delta t_0)\, ds_0 \\ \delta t = \int_{C_0} (T_{z_0}\, \delta z_0 + T_{t_0}\, \delta t_0)\, ds_0 \end{cases}$$

(18)

Lösungen der Jacobischen Gleichungen vor, und wegen deren linearen Charakters sind auch die funktionalen Ableitungen selbst Lösungen. In (18) sind die Lösungen (15) enthalten, sie entstehen, wenn wir aus der Gesamtheit der Funktionen (17) eine zweiparametrige Schar herausgreifen wie (7), welche ein Parameterfeld bildet.

Es bleibt noch übrig, die kanonische Gestalt der Gleichungen (14) anzugeben. Führen wir die natürlichen Ableitungen auf der Kurve ein, so erhält die quadratische Form (13) die Gestalt

$$\begin{aligned} 2\bar{\Phi} = {} & \bar{f}_{z_n z_n} \mathfrak{z}_n^2 + 2\bar{f}_{z_n z_s} \mathfrak{z}_n \mathfrak{z}_s + \bar{f}_{z_s z_s} \mathfrak{z}_s^2 + \cdots \\ & + \cdots + \bar{f}_{zz} \mathfrak{z}^2 + 2\bar{f}_{zt} \mathfrak{z}\mathfrak{t} + \bar{f}_{tt} \mathfrak{t}^2, \end{aligned}$$

(19)

führen wir dann als neue Unbekannte

$$\mathfrak{f} = -\bar{\Phi}_{\mathfrak{z}_n}, \qquad \mathfrak{w} = -\bar{\Phi}_{\mathfrak{t}_n}$$

(21)

ein und bilden unter Elimination von $\mathfrak{z}_n$ und $\mathfrak{t}_n$ die kanonische Funktion

$$\begin{aligned} 2X(\mathfrak{f}, \mathfrak{w}, \mathfrak{z}_s, \mathfrak{z}, \mathfrak{t}_s, \mathfrak{t}, x, y, x_s) = {} & \frac{\partial^2 K}{\partial \varphi^2} \mathfrak{f}^2 + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial \varphi \partial z_s} \mathfrak{f}\mathfrak{z}_s + \frac{\partial^2 K}{\partial z_s^2} \mathfrak{z}_s^2 \\ & + \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \mathfrak{w}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \mathfrak{z}^2 + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial z\, \partial t} \mathfrak{z}\mathfrak{t} + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \mathfrak{t}^2, \end{aligned}$$

(21)

welche ebenfalls eine quadratische Form mit 21 Termen ist, so erhalten wir als zweite kanonische Gestalt der Jacobischen

Gleichungen (14)

$$(22)\qquad \begin{cases} \delta\mathfrak{z} &= -\dfrac{\partial X}{\partial \mathfrak{f}}\,\delta n \\ \delta\mathfrak{f} &= -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial X}{\partial \mathfrak{z}_s}\,\delta n\right)+\left(k\,.\,\mathfrak{f}+\dfrac{\partial X}{\partial \mathfrak{z}}\right)\delta n \\ \delta\mathfrak{t} &= -\dfrac{\partial X}{\partial \mathfrak{w}}\,\delta n \\ \delta\mathfrak{w} &= -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial X}{\partial \mathfrak{t}_s}\,\delta n\right)+\left(k\,.\,\mathfrak{w}+\dfrac{\partial X}{\partial \mathfrak{t}}\right)\delta n. \end{cases}$$

Dieses System ist sich selbst adjungiert, d. h. es ist

$$(23)\qquad \int_C \left\{\mathfrak{z}^{(1)}\mathfrak{f}^{(2)}-\mathfrak{z}^{(2)}\mathfrak{f}^{(1)}+\mathfrak{t}^{(1)}\mathfrak{w}^{(2)}-\mathfrak{t}^{(2)}\mathfrak{w}^{(1)}\right\} ds \;=\; \text{Const.}$$

für je zwei Lösungen des Systems (22).

4) Das kanonische System als Berührungstransformation. Die Transformation der Extremalengesamtheit in sich.

Wir können das kanonische System (5) in derselben Weise wie im vorigen Abschnitt bei dem Variationsproblem mit einer abhängigen Veränderlichen als infinitesimale Berührungstransformation im Gebiete der Linienfunktionen auffassen, wobei das Extremalintegral die Rolle der charakteristischen Linienfunktion spielt. Es besteht hier für die Extremalen nach der Grenzformel der Variationsrechnung die Relation

$$(24)\qquad d'I = \int_{C_2}(\varphi_2\,d'z_2+\omega_2\,d't_2)\,ds_2-\int_{C_1}(\varphi_1\,d'z_1+\omega_1\,d't_1)\,ds_1,$$

wobei

$$(25)\qquad d'I = \int_{C_1}^{C_2} E\,d'f(z_x,\,z_y,\,z,\,t_x,\,t_y,\,t,\,x,\,y)\,dx\,dy$$

ist; bei Zusammenrücken der Kurven C_1 und C_2 folgt daraus

$$(26)\qquad -\int_C \delta\,[(\varphi\,d'z+\omega\,d't(ds] = \int_C d'f\;\delta n\,ds$$

und durch analoge Umformung wie auf pg. 67 finden wir

$$(27)\qquad \int_C \left\{\delta\varphi\,d'z-\delta z\,d'\varphi+\delta\omega\,d't-\delta t\,d'\omega-k\,(\varphi\,d'z+\omega\,d't)\,\delta n\right\} ds$$
$$= \int_C d'K\,\delta n\,ds,$$

so daß wir durch Koeffizientenvergleichung in (27) gerade das zweite kanonische System (5) erhalten.

Suchen wir weiter in derselben Weise wie auf pg. 68 nach den Transformationsgruppen, welche die einzelnen Extremalen der Extremalengesamtheit unter einander vertauschen, so werden wir für die einzelnen Punkte einer auf einer bestimmten Extremalen gelegenen Kurve $[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)]$ infinitesimale Verschiebungen erhalten in der Gestalt

$$(28)\qquad \begin{cases} \delta z = \mathfrak{a}[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,; s]\,\delta\alpha, \\ \delta t = \mathfrak{b}[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,; s]\,\delta\alpha, \\ \delta\varphi = \mathfrak{m}[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,; s]\,\delta\alpha, \\ \delta\omega = \mathfrak{n}[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,; s]\,\delta\alpha, \end{cases}$$

wobei

$$(29)\qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{t} = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{n}$$

Lösungen der Jacobischen Gleichungen (22) sein müssen. Aus der Tatsache, daß bei der Transformation die relative Integralinvariante, deren Element

$$\int_C (\varphi\, d'z + \omega\, d't)\, ds$$

ist, eine solche bleiben muß, folgt, daß sich die Funktionale in den rechten Seiten von (28) aus einer Linienfunktion

$$Q[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|]$$

als deren funktionale Ableitungen

$$(30)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = \quad Q_\varphi[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,; s], \\ \mathfrak{b} = \quad Q_\omega[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,, s], \\ \mathfrak{m} = -Q_z\,[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,; s], \\ \mathfrak{n} = -Q_t\,[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|\,, s] \end{cases}$$

herleiten lassen müssen.

Die beiden Bedingungen (29) und (30) sagen zusammen aus, daß bei einer Variation der Kurve $[C, z(s), \varphi(e), t(s), \omega(s)]$ auf derselben Extremalen

$$(31)\qquad Q[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)\,|] = \text{Const.}$$

sein muß, d. h. nach der auf pg. 70 eingeführten Ausdrucksweise, daß die Linienfunktion Q ein Integral des kanonischen Systems (5) sein muß, und diese ganze Betrachtung gilt auch umgekehrt.

Als Analogon des Poissonschen Theorems gilt schließlich wieder der Satz, daß sich aus zwei Integralen des kanonischen Systems

$$(32) \qquad \begin{cases} Q^{(1)}[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)|] = \text{Const.}, \\ Q^{(2)}[C, z(s), \varphi(s), t(s), \omega(s)|] = \text{Const.} \end{cases}$$

ein neues Integral herleiten läßt. Denn für die beiden Lösungssysteme der Jacobischen Gleichungen

$$\mathfrak{z}^{(1)} = Q_{\varphi}^{(1)}, \quad \mathfrak{f}^{(1)} = -Q_z^{(1)}, \quad \mathfrak{t}^{(1)} = Q_{\omega}^{(1)}, \quad \mathfrak{w}^{(1)} = -Q_t^{(1)}$$
$$\mathfrak{z}^{(2)} = Q_{\varphi}^{(2)}, \quad \mathfrak{f}^{(2)} = -Q_z^{(2)}, \quad \mathfrak{t}^{(2)} = Q_{\omega}^{(2)}, \quad \mathfrak{w}^{(2)} = -Q_t^{(2)},$$

welche sich aus (32) ergeben, folgt nach (23) die Relation

$$(33) \qquad \int_C \left\{ Q_{\varphi}^{(1)} Q_z^{(2)} - Q_{\varphi}^{(2)} Q_z^{(1)} + Q_{\omega}^{(1)} Q_t^{(2)} - Q_{\omega}^{(2)} Q_t^{(1)} \right\} ds = \text{Const.}$$

§ 3.

Integration von partiellen funktionalen Differentialgleichungen durch ein Extremalintegral.

Auch hier wollen wir in Verfolg einer systematischen Betrachtungsweise kurz eingehen auf die Umkehrung der Überlegungen des § 1, also die Zurückführung der Integration einer partiellen funktionalen Differentialgleichung auf die Erledigung eines zugehörigen Variationsproblems durch direktes Studium seiner Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

Es handelt sich darum eine Linienfunktion $V[L|]$ aus der Gleichung

$$(1) \qquad V_{xy} = H(x, y, z, t, V_{yz}, V_{zx}, V_{yt}, V_{tx})$$

zu bestimmen, wenn die Nebenbedingungen

$$(1^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{d\sigma} = \dfrac{\partial H}{\partial \pi}\dfrac{dx}{d\sigma} + \dfrac{\partial H}{\partial \varkappa}\dfrac{dy}{ds} & [\pi = V_{yz},\ \varkappa = V_{zx} \\ \dfrac{dt}{d\sigma} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}\dfrac{dx}{d\sigma} + \dfrac{\partial H}{\partial \chi}\dfrac{dy}{d\sigma} & \psi = V_{yt},\ \chi = V_{tx}| \end{cases}$$

die funktionalen Ableitungen vollständig festlegen. Statt dessen können wir auch unter Ausschaltung der Nebenbedingungen für die funktionalen Ableitungen die Gleichung

$$(2) \qquad V_n^* = K(V_z^*, V_t^*, z, z_s, t, t_s, x, y, x_s)$$

zu Grunde legen, wo aber nun die Funktion K gewissen Bedingungen genügen muß.

Wir können in analoger Weise wie auf pg. 72 durch die Legendresche Transformation zu H bezw. K eine Funktion

$f(z_x, z_y, z, t_x, t_y, t, x, y)$ bestimmen, die wir dann als Integranden eines Variationsproblems wählen; das zugehörige Extremalintegral wird analog pg. 73 bei willkürlicher Anfangskurve L_0 ein vollständiges Integral von (1) bezw. (2) vorstellen.

Daß auch jedes Integral $V[L|]$ dieser Gleichungen durch den Extremalintegralwert in einem Funktionsfelde dargestellt werden kann, folgt daraus, daß ein Integral eindeutig bestimmt ist, wenn wir seine Werte auf einer Zylinderfläche kennen, welche zu einer Kurve C_0 der (x, y)-Ebene gehört:

$$V[C_0, z(s), t(s)|] = \Phi[z(s), t(s)|]. \tag{4}$$

Bilden wir nämlich die funktionalen Ableitungen von Φ nach z und t, bestimmen die Funktionen z_n und t_n aus den Gleichungen

$$-\bar{f}_{z_n} = \Phi_z, \qquad -\bar{f}_{t_n} = \Phi_t \tag{5}$$

und legen durch jede zu C_0 gehörigen Kurve $z(s)$, $t(s)$ die Extremale des zur Funktion (2) gehörigen Variationsproblems, deren normale Ableitungen die eben bestimmten Funktionen $z_n(s)$ und $t_n(s)$ sind, so haben wir ein bestimmtes Funktionsfeld und die Kurvenbelegung dieses Feldes vermittelt uns die gesuchte Lösung der partiellen funktionalen Differentialgleichung (1) in der Form

$$V[L|] = \Phi[(C_0), z(s), t(s)|] + \int_{L_0}^{L} E f(z_x, z_y, z, t_x, t_y, t, x, y)\, dx\, dy. \tag{6}$$

Diese Linienfunktion reduziert sich in der Tat für $C = C_0$ auf das verlangte Funktional (4) und genügt der Gleichung (1), wie in einer zu pg. 85 analogen Weise aus der Grenzformel der Variationsrechnung folgt. Aus der eindeutigen Bestimmtheit eines Integrals folgt somit unmittelbar, daß irgend ein gegebenes Integral von (1) immer als Kurvenbelegung eines Funktionsfeldes dargestellt werden kann. Dies Verfahren zeigt zugleich, daß ein Integral, welches noch willkürliche Funktionen enthält, sich durch eine Schar von Funktionsfeldern darstellen läßt, welche entsprechend diesen willkürlichen Funktionen veränderlich ist. Aus einem solchen „vollständigen" Integral, das von zwei willkürlichen Funktionen abhängt, können wir auch ein „allgemeines" Integral gewinnen, indem wir zwischen den beiden willkürlichen Funktionen eine beliebige funktionale Beziehung annehmen und die „Enveloppe" [1]) der dann noch von einer willkürlichen Funktion abhängigen Schar von

1) P. Lévy, loc. cit. (pg. 6), pg. 156.

Funktionsfeldern bilden. Die Integration der Gleichung (1) ist sonach zurückgeführt auf die Bestimmung der Extremalen des zugehörigen Variationsproblems, der „Charakteristiken" der gegebenen Gleichung.

Zum Schluß wollen wir noch eine Eigenschaft der Funktionsfelder, die ein Integral der partiellen funktionalen Differentialgleichung (1) darstellen, herleiten, welche in gewissem Sinne ein Analogon des auf pg. 27 erwähnten Satzes von A. Mayer ist.

Greifen wir aus dem Funktionsfelde ein Parameterfeld

$$z = z(x, y, a, b), \qquad t = t(x, y, a, b) \tag{3}$$

heraus, so geht eine im Funktionsfelde definierte Linienfunktion in eine Funktion der ebenen Kurve C und der beiden Parameter a und b über.

Die bei fester Kurve C betrachtete Linienfunktion (4) wird eine Funktion der beiden Parameter $\Phi(a, b)$. War das Funktionsfeld in der auf voriger Seite angegebenen Weise bestimmt, so haben wir in dem Parameterfelde, welches wir jetzt betrachten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial a} &= \int_{C_0} \left\{ \left(f_{z_x} \frac{\partial z}{\partial a} + f_{t_x} \frac{\partial t}{\partial a} \right) \frac{dy}{ds} - \left(f_{z_y} \frac{\partial z}{\partial a} + f_{t_y} \frac{\partial t}{\partial a} \right) \frac{dx}{ds} \right\} ds \\
\frac{\partial \Phi}{\partial b} &= \int_{C_0} \left\{ \left(f_{z_x} \frac{\partial z}{\partial b} + f_{t_x} \frac{\partial t}{\partial b} \right) \frac{dy}{ds} - \left(f_{z_y} \frac{\delta z}{\partial b} + f_{t_y} \frac{\delta t}{\partial b} \right) \frac{dx}{ds} \right\} ds.
\end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{C_0} \Bigg\{ &\left[\frac{\partial}{\partial b} \left(f_{z_x} \frac{\partial z}{\partial a} + f_{t_x} \frac{\partial t}{\partial a} \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left(f_{z_x} \frac{\partial z}{\partial b} + f_{t_x} \frac{\delta t}{\partial b} \right) \right] \frac{dy}{ds} \\
&- \left[\frac{\partial}{\partial b} \left(f_{z_y} \frac{\delta z}{\partial a} + f_{t_y} \frac{\partial t}{\partial a} \right) - \frac{\partial}{\partial a} \left(f_{z_y} \frac{\partial z}{\partial b} + f_{t_y} \frac{\partial t}{\partial b} \right) \right] \frac{dx}{ds} \Bigg\} ds = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

eine Relation, welche aussagt, wie aus den Überlegungen von pg. 92 folgt, daß das Parameterfeld ein „Unabhängigkeitsfeld" ist. Die Funktionsfelder, welche zu Integralen der Gleichung (1) führen, besitzen darnach die Eigenschaft, daß jedes aus ihnen herausgegriffene Parameterfeld ein Unabhängigkeitsfeld ist.

Inhalt.

Einleitung . . . . . pg. 5—8

Erster Abschnitt: Das Variationsproblem der einfachen Integrale . „ 9—37

§ 1. Das Variationsproblem und die partiellen Differentialgleichungen von Hamilton und Jacobi . . . . „ 9—20

§ 2. Integrationstheorie der Euler-Lagrangeschen Gleichungen bezw. des zugehörigen kanonischen Systems „ 21—32

§ 3. Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch ein Extremalintegral . „ 32—37

Zweiter Abschnitt: Das Variationsproblem der Doppelintegrale . . „ 38—98

Erstes Kapitel: Das Problem mit einer unbekannten Funktion „ 38—75

§ 1. Das Variationsproblem und die Gleichung zwischen den partiellen funktionalen Ableitungen des Extremalintegrals . . . . . „ 38—54

§ 2. Integrationstheorie der Euler-Lagrangeschen Gleichungen und der zugehörigen kanonischen Systeme . „ 54—71

§ 3. Integration von partiellen funktionalen Differentialgleichungen durch ein Extremalintegral. . . . . „ 71—75

Zweites Kapitel: Das Problem mit zwei unbekannten Funktionen . . . . . „ 76—98

§ 1. Das Variationsproblem und die partielle funktionale Differentialgleichung . . . . . „ 76—87

§ 2. Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen und die zugehörigen kanonischen Systeme. . . . . „ 87—96

§ 3. Integration von partiellen funktionalen Differentialgleichungen durch ein Extremalintegral . . . . „ 96—98

Lebenslauf.

Ich, Heinrich Friedrich Wilhelm Georg Prange, evang. Konfession, wurde am 1. Januar 1885 als Sohn des Kaufmanns Georg Prange zu Hannover geboren. Ich besuchte von Ostern 1891 ab die Vorschule der damaligen „Höheren Bürgerschule I“ (jetzt Oberrealschule) zu Hannover und seit Ostern 1894 das humanistische Gymnasium „Lyzeum II“ (jetzt Königl. Goethe-Gymnasium) zu Hannover, das ich Ostern 1903 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Darauf studierte ich von Ostern 1903 bis Michaelis 1904 in Göttingen, von Michaelis 1904 bis dahin 1905 in München und von Michaelis 1905 bis dahin 1906 wieder in Göttingen Mathematik. Meine Lehrer waren:

in Göttingen: Baumann, Hilbert, Klein, Liebisch, Minkowski (†), Mollwo, G. E. Müller, Peter, Riecke, Runge, Schilling, Schultheß, Schwarzschild, Voigt, Wiechert, Zermelo.

in München: v. Baeyer, v. Braunmühl (†), Doehlemann, Lindemann, Lipps (†), Pringsheim, Röntgen, E. v. Weber.

Ein im Sommer 1906 ausbrechendes Lungenleiden zwang mich, mein Studium zunächst völlig aufzugeben; ein Versuch, es 1908 wieder aufzunehmen, führte sogleich zu einem neuen Zusammenbruch meiner Gesundheit. Eine Erholung erfolgte diesmal nur langsam; Herbst 1910 war ich soweit wieder hergestellt, daß ich bei den Übungen des Herrn Prof. C. H. Müller an der technischen Hochschule zu Hannover als Helfer tätig sein konnte. Zugleich begann ich mich wieder mit Mathematik zu beschäftigen und konnte Juni 1912 die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen vor der Prüfungskommission in Göttingen absolvieren, worauf ich Michaelis 1912 als Assistent für Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover eintrat.

Allen meinen Lehrern bin ich zu herzlichstem Dank verpflichtet, besonders dem unvergeßlichen H. Minkowski, sowie Herrn Geheimrat Klein und Herrn Geheimrat Hilbert, letzterem auch insbesondere dafür, daß er das Referat über diese Arbeit übernommen hat.

Dank schulde ich ferner Herrn Geheimrat Kiepert und Prof. C. H. Müller in Hannover für ihr freundliches Entgegenkommen. Zu Prof. Müller trat ich 1910 in persönliche Beziehungen, die mir sehr förderlich gewesen sind. Er hat mich in dieser Zeit auf Aufgaben gelenkt, denen meine jeweilige Arbeitskraft gewachsen war, was nicht zum wenigsten dazu beitrug, daß ich allmählich meine Krankheit völlig überwand und an selbständige Arbeiten herantreten konnte. Er hat auch das Entstehen dieser Arbeit mit Interesse verfolgt, für ihre Redaktion mir wertvolle Ratschläge erteilt.